

ДПА

2014

РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ
ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ

МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

для державної
підсумкової
атестації
з математики
Частина 2

11 клас



УДК 373.5.091.26:51
ББК 74.262.21
З-43

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 27.12.2013 № 1844)*

Збірник завдань для державної підсумкової атеста-
З-43 ції з математики : 11-й кл. : у 2-х ч. / А.Г. Мерзляк
[та ін.]; за ред. М.І. Бурди. — К. : Центр навч.-метод.
л-ри, 2014. — 208 с.

ISBN 978-617-626-172-8.

Ч. 2. — ISBN 978-617-626-199-5.

УДК 373.5.091.26:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-617-626-172-8
ISBN 978-617-626-199-5 (Ч. 2)

© Мерзляк А.Г.,
Полонський В.Б.,
Якір М.С., 2014
© Центр навчально-
методичної літератури,
серійне оформлення,
оригінал-макет, 2014

Варіант 1

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу:

$$\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}} - \sqrt{9-4\sqrt{5}} \right)^2.$$

2.2. Розв'яжіть нерівність $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x \leq 5$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_5^2 x + 2 \log_5 \sqrt{x} = 2.$$

2.4. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + 4 \cos 4x$, графік якої проходить через точку $A(\pi; 3)$.

2.6. Двоє робітників виготовили за перший день 100 деталей. За другий день перший робітник виготовив деталей на 20 % більше, ніж за перший день, а другий робітник — на 10 % більше, ніж за перший день. Усього за другий день вони виготовили 116 деталей. Скільки деталей виготовив за перший день перший робітник?

2.7. Одна сторона трикутника дорівнює 35 см, а дві інші відносяться як 3 : 8 і утворюють кут 60° . Знайдіть більшу сторону трикутника.

2.8. Переріз кулі площиною, яка віддалена від її центра на 15 см, має площу $64\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4}} + 2$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x.$$

3.3. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

має три розв'язки?

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} \geq 8.$$

4.3.^м Знайдіть спільні точки графіків функцій $f(x) = x^3 - 3x + 2$ і $g(x) = (x - 1)^2$, у яких ці графіки мають спільні дотичні.

4.4.^м У трикутнику ABC відрізок AK (точка K належить стороні BC) ділить медіану BM у відношенні 3:4, рахуючи від вершини B . У якому відношенні точка K ділить сторону BC ?

Варіант 2

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

2.2. Чому дорівнює $\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

2.3. Обчисліть значення виразу $\frac{\log_9 27 + \log_9 3}{2 \log_2 6 - \log_2 9}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0.$$

2.5. Чому дорівнює найменше значення функції $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; 1]$?

2.6. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які менші від 150 і діляться націло на 4.

2.7. Відомо, що O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть відрізок BO , якщо $AO:OC = 7:6$ і $BD = 39$ см.

2.8. В основі конуса проведено хорду завдовжки a , яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = 8 - x^2$ і прямою $y = 4$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2} = 4.$$

3.3. Сторони трикутника дорівнюють відповідно 11 см, 12 см і 13 см. Знайдіть медіану, яку проведено до більшої сторони трикутника.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a число π є періодом функції

$$f(x) = \frac{\sin x}{a - \cos x} ?$$

- 4.2.^м Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

$$\log_3(x^2 + 6x + 12) \log_5(y^2 + 2y + 6) = 1.$$

- 4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 7, \\ y^2 + 4z = -7, \\ z^2 + 6x = -14. \end{cases}$$

- 4.4.^м У трикутнику ABC бісектриси AA_1 і CC_1 перетинаються в точці O , $\angle AOC = 120^\circ$. Доведіть, що $\angle C_1BO = \angle C_1A_1O$.

Варіант 3

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{(x-7)(x+3)}{x-2} \geq 0.$$

2.3. Спростіть вираз $\frac{4x^{\frac{1}{2}} - 8}{4x - 4x^{\frac{1}{2}} + 1} \cdot \frac{2x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{2}} - 2}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_6(x-2) + \log_6(x-11) = 2.$$

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 \left(\frac{6}{\sqrt{3x+1}} - x \right) dx$.

2.6. Розв'яжіть нерівність $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0$.

2.7. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 10 см. Чому дорівнює відстань між серединами її діагоналей?

2.8. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а діагональний переріз є рівностороннім трикутником.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$.

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

3.3. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро — 2 см. Через сторону AC нижньої основи і середину сторони A_1B_1 верхньої проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin x + \frac{a}{2} = 0$$

має на проміжку $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ три корені?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$2^x = 3x - 1.$$

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3, \\ xyz = 1. \end{cases}$$

4.4.^м Два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розташовані так, що точка B — середина відрізка AB_1 , точка C — середина відрізка BC_1 , точка A — середина відрізка CA_1 . Знайдіть площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S .

Варіант 4

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть рівняння $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$.

2.2. Чому дорівнює значення виразу $81^{\frac{1}{2} \log_9 12} + 6^{2 \log_6 3}$?

2.3. Спростіть вираз $\left(\frac{a^{-\frac{3}{4}} a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{12}}} \cdot \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{1}{6}}} \right)^3$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{8-7x} = -x$.

2.5. Спростіть вираз $\frac{\sin 3\alpha + \sin \alpha - 2 \sin 2\alpha}{\cos 3\alpha + \cos \alpha - 2 \cos 2\alpha}$.

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} - 2x$, графік якої проходить через точку $A(7; -2)$.

2.7. На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено точки M і K відповідно так, що $MK \parallel AC$ і $AM : BM = 2 : 5$. Знайдіть площу трикутника MBK , якщо площа трикутника ABC дорівнює 98 см^2 .

2.8. Основа прямої трикутної призми – рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані призми, яка містить бічну сторону основи, дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \sin 3x.$$

3.2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - 3x + 2$, яка паралельна прямій $x - y = 5$.

3.3. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см , а її висота — 12 см .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Скільки розв'язків має рівняння

$$(\log_2(x+1) - 3)\sqrt{x-a} = 0$$

залежно від значення параметра a ?

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9.$$

4.3.^м Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccot} x)}$.

4.4.^м Діагональ опуклого чотирикутника ділить навпіл відрізок, який з'єднує середини двох його протилежних сторін. Доведіть, що ця діагональ ділить чотирикутник на два рівновеликих трикутника.

Варіант 5

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}+1}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_3(4x - 5) < \log_3 7 + 2.$$

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$$

2.5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$.

2.6. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{2x+1}{x-3} \leq 1$?

2.7. Сторони трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його меншої сторони.

2.8. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом зі стороною 6 см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 90° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{5x - 2 - 2x^2} = 0.$$

3.3. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом β і гіпотенузою c . Бічне ребро, яке проходить через вершину даного гострого кута, перпендикулярне до площини основи, а бічна грань, яка містить катет, протилежний даному куту, нахилена до площини основи під кутом γ . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a нерівність

$$\sin^2 x - (2a + 1) \sin x + a^2 + a > 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

- 4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$|\lg x + 2| + |\lg x - 1| = 3.$$

- 4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{8x + 1} + \sqrt{3x - 5} = \sqrt{7x + 4} + \sqrt{2x - 2}.$$

- 4.4.^м На сторонах CD і AD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $CM:MD=1:1$ і $AN:ND=1:2$. Відрізки BM і CN перетинаються в точці K . Знайдіть відношення $BK : KM$.

Варіант 6

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{3a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{-\frac{1}{3}}}$ при $a = 5$?

2.2. Розв'яжіть нерівність $4^x \cdot 2^{x^2+1} > 16$.

2.3. Обчисліть значення виразу $5^{4\log_5 \sqrt{3} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{2-x}} = 3\frac{1}{3}$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{12}{\sqrt{3x-2}}$, графік якої проходить через точку $A(9; 30)$.

2.6. Моторний човен проплив 7 км проти течії річки і 8 км за течією, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.

2.7. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 12 см, а менша бічна сторона — $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 120° .

2.8. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і гострим кутом α . Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

3.2. Доведіть тотожність:

$$\frac{\left(\sin(\pi - 3\alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\alpha\right) + \cos(\pi + \alpha)\right)}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} = -\sin 4\alpha.$$

3.3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а основа — 3 см. Знайдіть медіану трикутника, яка проведена до його бічної сторони.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Визначте кількість розв'язків рівняння

$$\left| 1 - \sqrt{|x - 2|} \right| = a$$

залежно від значення параметра a .

4.2.^м Доведіть, що при $x > 0$ виконується рівність:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\log_{2x} x^2 - \log_{4x} x = 0.$$

4.4.^м З точки P , розташованої всередині гострого кута BAC , опущено перпендикуляри PC_1 і PB_1 на сторони AC і AB відповідно. Доведіть, що $\angle C_1AP = \angle C_1B_1P$.

Варіант 7

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $25^{\frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 5}}$.

2.2. Спростіть вираз $\frac{2x^{\frac{1}{6}} + 3}{6x^{\frac{1}{6}}} : \frac{4x^{\frac{1}{3}} - 9}{6x^{\frac{1}{3}}}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$6^x + 6^{1-x} = 7.$$

2.4. Укажіть область визначення функції $f(x) = \frac{4}{\sqrt{3x-15}} + \frac{8}{x^2-36}$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 4x^3 - 4x + 6$, графік якої проходить через точку $A(1; 5)$.

2.6. Які три додатних числа треба вставити між числами 3 і 48, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію?

2.7. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

2.8. Об'єм конуса з радіусом основи 6 см дорівнює 96π см³. Обчисліть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 0,4x^2 + 3x - 9$, яка паралельна прямій $y = 7x - 8$.

3.2. Спростіть вираз $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3.3. Основою піраміди є правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до неї під кутом 60° . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Залежно від значення параметра a знайдіть критичні точки функції $f(x) = (2x - 1)\sqrt[4]{x - a}$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x + 5} \geq 3.$$

4.3.^м Побудуйте графік функції:

$$y = \arcsin \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{1 - x}.$$

4.4.^м У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB=BC$) проведено бісектриси AA_1 і BB_1 . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $AA_1=2BB_1$.

Варіант 8

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{m^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{6}} n^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{1}{3}}} : \frac{m^{\frac{1}{3}} - 2m^{\frac{1}{6}} n^{\frac{1}{6}} + n^{\frac{1}{3}}}{m^{\frac{1}{6}} n^{\frac{1}{6}}}.$

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x = 280.$$

2.3. Спростіть вираз $\operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$

2.4. Перший член арифметичної прогресії дорівнює -3 , а різниця дорівнює 4 . Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала 150 ?

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$x - \sqrt{x+1} = 5.$$

2.6. Знайдіть найменше значення функції $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$ на проміжку $[0; 4]$.

2.7. Висота BD трикутника ABC ділить його сторону AC на відрізки AD і CD . Знайдіть відрізок CD , якщо $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$.

2.8. Обчисліть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює $12\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом 30° .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямими $y = 4x + 1$ та $x = 2$.

3.2. Розв'яжіть нерівність:

$$\lg^2 100x - 7 \lg x \geq 8.$$

3.3. У прямокутному трикутнику MNK ($\angle N = 90^\circ$) відомо, що $MN = 6$ см, $MK = 10$ см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки N , M і точку перетину бісектриси кута M з катетом NK .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких раціональних значеннях параметрів a і b один із коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx - 17 = 0$ дорівнює $\sqrt{2} - 1$?

4.2.^м Скільки коренів рівняння $\frac{\cos 3x + \cos x}{1 - \sin x} = 0$ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

4.3.^м Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x; y)$, які задовольняють нерівність:

$$\sqrt{x^2 + 8x + 20} \cdot \sqrt{y^2 - 10y + 34} \leq 6.$$

4.4.^м Доведіть, що площа прямокутної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює добутку її основ.

Варіант 9

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть рівняння:

$$25^x + 25 = 26 \cdot 5^x.$$

2.2. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = e^{4x} + e^{-x^2}$ у точці $x_0 = 0$.

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\left(\frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{4}{3}}}{27^{-\frac{1}{9}} \cdot 4^{\frac{1}{4}}} \right)^{-1}$?

2.4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{10}{2 - \sqrt[4]{x}}$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x \right) dx$.

2.6. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha}$.

2.7. З точки A , що лежить поза прямою m , проведено до цієї прямої похилі AC і AD , які утворюють з нею кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть проекцію похилої AD на пряму m , якщо $AC = 4\sqrt{2}$ см.

2.8. На відстані 12 см від центра кулі проведено площину. Площа утвореного перерізу дорівнює 64π см². Знайдіть площу поверхні кулі.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^{\log_2 x} = 16.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.

3.3. Бічне ребро правильної трикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом α . Знайдіть двограний кут при ребрі основи піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+6} = 6.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a рівняння $x^3 - 7x^2 + ax - 8 = 0$ має три дійсних корені, які утворюють геометричну прогресію?

4.3.^м Доведіть, що $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19} = \frac{1}{2}$.

4.4.^м На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD:DC=2:3$. У якому відношенні медіана BM ділить відрізок AD ?

Варіант 10

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{6-2\sqrt{6}} + \frac{1}{6+2\sqrt{6}}$.
- 2.2. Спростіть вираз $\frac{\cos 7\alpha + \cos \alpha}{\sin 7\alpha - \sin \alpha}$.
- 2.3. Розв'яжіть рівняння $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$.
- 2.4. Обчисліть значення виразу $100^{\frac{1}{2} \lg 25 - 3 \lg 2}$.
- 2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{6}{\cos^2 6x}$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{18}; 3\sqrt{3}\right)$.
- 2.6. Перший тракторист може зорати поле за 3 год швидше, ніж другий. Якщо перший тракторист пропрацює 4 год, а потім його змінить другий, то останній закінчить оранку цього поля за 3 год. За скільки годин може зорати все поле перший тракторист?
- 2.7. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці K . Менша основа BC трапеції дорівнює 4 см, $BK=5$ см, $AB=15$ см. Знайдіть більшу основу трапеції.
- 2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, яка знаходиться на відстані d від центра верхньої основи і яку видно із цього центра під кутом φ . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною нижньої основи кут β . Знайдіть об'єм циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 + 6x}{x - 2}$.
- 3.2. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$.
- 3.3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його меншого гострого кута.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння $\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 2xy} - 1 = y - x$.

4.2.^м При яких значеннях параметра a функція $y = f(x + a)$ є парною, якщо $f(x) = 2^x + \frac{4}{2^x}$?

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$$

4.4.^м Точки M і N — середини сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ ($AD \neq BC$). Відомо, що $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$. Доведіть, що даний чотирикутник — трапеція.

Варіант 11

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{m} - \sqrt[4]{mn}}{\sqrt{m}} : \frac{\sqrt{m} - 2\sqrt[4]{mn} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{mn}}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння $27 \cdot 9^{x^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}$.

2.3. Спростіть вираз:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha).$$

2.4. Обчисліть значення виразу $\left(\log_2 12 - \log_2 3 + 9^{\log_9 8}\right)^{\lg 3}$.

2.5. Дано функцію $f(x) = e^{-2x} \cos x$. Знайдіть $f'(0)$.

2.6. Катер пройшов 48 км за течією річки і повернувся назад, витративши на шлях проти течії на 3 год більше, ніж на шлях за течією річки. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 4 км/год.

2.7. З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 25 см і 17 см. Знайдіть довжини проєкцій цих похилих на дану пряму, якщо вони відносяться як 5:2.

2.8. Діагональ грані куба дорівнює a . Чому дорівнює діагональ куба?

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x+2}{x^2+5}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \log_2(x-2) \cdot \log_{x-2} 2$.

3.3. Основа піраміди — прямокутник, одна із сторін якого дорівнює a і утворює з діагоналлю прямокутника кут α . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо даної піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\arcsin^2 x + (3a - 3) \arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$$

має розв'язки?

4.2.^м Залежно від значення параметра a знайдіть точку мінімуму функції:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a+1}{2}x^2 + ax - 7.$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2.$$

4.4.^м Точки M , N , P належать сторонам AB , BC , CA трикутника ABC відповідно. Відомо, що $AM:AB=BN:BC=CP:CA=1:3$. Площа трикутника MNP дорівнює S . Знайдіть площу трикутника ABC .

Варіант 12

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}$ при $a = 27$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0.$$

2.3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy + x = 56, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

2.4. Обчисліть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{10} = 32$, а різниця прогресії $d = 4$.

2.5. Розв'яжіть нерівність $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}\right)^{\frac{3x-2}{x-5}} \leq \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}\right)^{\frac{7}{x-5}}$.

2.6. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 2$.

2.7. Площа ромба дорівнює 120 см^2 , а його діагоналі відносяться як $5:12$. Знайдіть периметр ромба.

2.8. Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом α . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи і середину даної хорди, нахилений до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо твірна циліндра дорівнює l .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_3(2x-1) + \log_3(x-9) < 2.$$

3.2. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4x + 5$ та прямою $y = 5 - x$.

3.3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см . Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Спростіть вираз:

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a + 4} + 5} + \sqrt{a - 2\sqrt{a + 4} + 5}.$$

4.2.^м Побудуйте графік функції $y = \cos(2 \arcsin x)$.

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутник ABC вписано коло. Дотична до цього кола перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Периметр трикутника KBL дорівнює $2q$. Знайдіть сторону AC , якщо периметр трикутника ABC дорівнює $2p$.

Варіант 13

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $(5^{0,6})^{-0,6} \cdot (0,2)^{-2,36}$?

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$3^{x+2} - 3^x \leq 24.$$

2.3. Знайдіть значення $\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -3$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$4\log_2 \sqrt[3]{x} + \log_2 \frac{1}{x} = -1.$$

2.5. Геометрична прогресія (b_n) задана формулою загального члена $b_n = 7 \cdot 2^{n-1}$. Знайдіть суму шести перших членів прогресії.

2.6. Змішавши 3-відсотковий і 8-відсотковий розчини солі, отримали 260 г 5-відсоткового розчину. Скільки взяли грамів 3-відсоткового розчину?

2.7. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M . Знайдіть відрізок AM , якщо $AB = 6$ см і $BC : AD = 3 : 4$.

2.8. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи дорівнює R .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 6x + 9$ і прямою $y = 5 - x$.

3.2. Спростіть вираз:

$$\sqrt{(\sqrt{a} + 2)^2 - 8\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a} - 2)^2 + 8\sqrt{a}}.$$

3.3. Основа піраміди — квадрат зі стороною 12 см, а дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Скільки критичних точок на проміжку $[-a; a]$ має функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

залежно від значення параметра a ($a > 0$) ?

4.2.^м Доведіть тотожність:

$$\arctg x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 і CC_1 . Відомо, що $\angle AA_1C = \angle CC_1A$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

Варіант 14

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $81^{0,25} - 9^{0,5} - (0,2)^{-2}$.

2.2. Знайдіть корінь рівняння $9^{x+1} - 9^x = 24$.

2.3. Спростіть вираз $\frac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + 2 \sin \alpha \sin \beta}$.

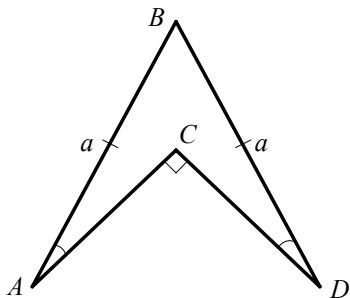
2.4. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) \leq 1.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} + \cos \frac{x}{2}$, графік якої проходить через початок координат.

2.6. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 2x}{4x - 1}}$.

2.7. У чотирикутнику $ABDC$, зображеному на рисунку, $AB = BD = a$, $\angle A = \angle D = 15^\circ$. Знайдіть периметр чотирикутника $ABDC$, якщо $\angle ACD = 90^\circ$.



2.8. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α , а відстань від центра основи до твірної конуса дорівнює a . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 + 7x}{x - 9}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{tg} x |\cos x|$.

3.3. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geq 0.$$

4.2.^м Доведіть, що функція $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$ не є періодичною.

4.3.^м Обчисліть інтеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

4.4.^м Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють a і b . Відрізки, що з'єднують середини протилежних сторін, рівні. Знайдіть площу чотирикутника.

Варіант 15

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть область значень функції $f(x) = x^2 - 10x + 27$.

2.2. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{4\sqrt{x}}{x-1}.$$

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{6}{4^x - 2} - \frac{5}{4^x + 1} = 2.$$

2.4. Двоє робітників, працюючи разом, можуть виготовити певну кількість однакових деталей за 10 год. За скільки годин може виготовити ці деталі один робітник, якщо іншому для цього потрібно 35 год?

2.5. Знайдіть найбільше значення функції $y = x + \frac{4}{x}$ на проміжку $[1; 3]$.

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$1 + \sin 2x = (\sin 2x - \cos 2x)^2.$$

2.7. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 6 см, а діагональ є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть площу трапеції.

2.8. З точки M до площини α проведено похилі MB і MC , які утворюють з площиною кути, що дорівнюють 30° . Знайдіть відстань від точки M до площини α , якщо $\angle BMC = 90^\circ$, а довжина відрізка BC дорівнює 8 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = x + 2$.

3.2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}$.

3.3. Основа прямої призми — ромб зі стороною a і тупим кутом α . Через більшу діагональ нижньої основи і вершину тупого кута верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$, яка проходить через точку $O(0; 0)$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x.$$

4.3.^м Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння

$$a^2 \cos \frac{\pi x}{2} + ax^2 = 1$$

має єдиний розв'язок.

4.4.^м Коло, побудоване на більшій основі трапеції як на діаметрі, дотикається до меншої основи, перетинає бічні сторони і ділить їх навпіл. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо радіус кола дорівнює R .

Варіант 16

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\left(\sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x^2 + 7x + 12} = 6 - x.$$

2.3. Обчисліть значення виразу $10^{2\lg 5} - 49^{\log_7 4}$.

2.4. При якому додатному значенні x значення виразів $x - 7$, $x + 5$, $3x + 1$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

2.5. Яка область визначення функції $y = \ln \frac{4 - 5x}{x - 2}$?

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{3x} dx$.

2.7. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу трикутника.

2.8. Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом α . Відрізок, який сполучає середину висоти піраміди і середину апофеми, дорівнює a . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|2^x - 4|}{2^x - 4}$.

3.2. Доведіть тотожність:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4} + \operatorname{tg} \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)\right)^2 + \left(\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{ctg} (\pi - \alpha)\right)^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha}.$$

3.3. Точка перетину бісектрис гострих кутів при більшій основі трапеції належить меншій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\cos x \cdot \sqrt{4x - 3 - x^2} \geq 0.$$

4.2.^м Знайдіть найменше значення функції $f(x) = x^2 + |2x + 1|$ на проміжку $[-1; 0]$.

4.3.^м Пряма $y = 6x - 7$ дотикається до параболи $y = x^2 + bx + c$ у точці $M(2; 5)$. Знайдіть рівняння параболи.

4.4.^м Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E . Відомо, що $S_{ABE} = 1 \text{ см}^2$, $S_{DCE} = 4 \text{ см}^2$, $S_{ABCD} \leq 9 \text{ см}^2$. Знайдіть площі трикутників ADE і BCE .

Варіант 17

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть корені рівняння $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$.

2.2. Обчисліть значення виразу $3^{\log_6 11} \cdot 2^{\log_6 11}$.

2.3. Спростіть вираз $\frac{m-3m^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{5}{6}}-3} + \frac{n^{\frac{1}{3}}-m^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{6}}+m^{\frac{1}{6}}}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$2^{2x+1} + 3 \cdot 2^x - 2 = 0.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 2x$, графік якої проходить через точку $N(9; -8)$.

2.6. Човен, власна швидкість якого дорівнює 8 км/год, проплив 15 км проти течії річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки.

2.7. Пряма, яка паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає його сторону AB у точці M , а сторону BC — у точці K , $BM=4$ см, $AC=8$ см, $AM=MK$. Знайдіть сторону AB .

2.8. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофе́ма — 15 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{\sqrt{\log_2^2 x}}{\log_2 x}$.

3.3. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α . Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{\cos x} \leq 0.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$8^x - 7 \cdot 4^x + 7 \cdot 2^{x+1} - 8 > 0.$$

4.3.^м Скільки критичних точок на проміжку $[0; 1]$ має функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2}$$

залежно від значення параметра a ?

4.4.^м У трикутнику ABC проведено медіану AA_1 . Через точку C проведено відрізок FN , який дорівнює відрізку AA_1 і паралельний йому. Знайдіть площу чотирикутника $AFNA_1$, якщо площа трикутника ABC дорівнює S .

Варіант 18

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $\frac{\left(a^6 b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{9}{8}}}$ при $a = 6$, $b = 9$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{5x-6}$.

2.3. Спростіть вираз $\frac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{-2x}$.

2.5. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^5$ у точці $x_0 = 1$.

2.6. Катер пройшов 24 км проти течії річки і 27 км по озеру, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.

2.7. На стороні BC прямокутника $ABCD$ позначено точку M . Знайдіть площу чотирикутника $AMCD$, якщо $AM = 13$ см, $AB = 12$ см, $BD = 20$ см.

2.8. В основі конуса проведено хорду завдовжки $8\sqrt{2}$ см на відстані 4 см від центра основи. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом 60° .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$6\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 5\cos^2 x = 2.$$

3.2. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{8}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, на дві рівновеликі частини?

3.3. У рівнобедрений трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює 10 см, а точка дотику ділить бічну сторону на відрізки, довжини яких відносяться як 8:5, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площу цього трикутника.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x - (a + 3) \cdot 2^x + 4a - 4 = 0$$

має тільки один дійсний корінь?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 1024.$$

4.3.^м Доведіть нерівність:

$$2^n > 2n + 1, \quad n \in N, \quad n \geq 3.$$

4.4.^м У трикутнику ABC точка D — основа бісектриси, проведеної з вершини C , $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{CD}$. Доведіть, що $\angle ACB = 120^\circ$.

Варіант 19

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $(\sqrt[5]{8} - \sqrt[4]{25}) (\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{25})$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$16^{5-3x} \geq 0,125^{5x-6}.$$

2.3. Знайдіть первісну функції $f(x) = 4e^{2x-1}$, графік якої проходить через точку $A(1; 3e)$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\lg 10x \cdot \lg 0,1x = 3$.

2.5. Чому дорівнює перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює 4, а сума перших тридцяти членів дорівнює 2100?

2.6. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = \frac{4x-5}{x+2}$.

2.7. Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і ділить іншу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей ділить дану діагональ.

2.8. Висота конуса дорівнює 6 см, а кут при вершині осового перерізу — 120° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 4x - x^2$.

3.2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+8} - \sqrt{2x-1} = 2$.

3.3. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною однієї бічної грані кут α , а з площиною іншої бічної грані — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1." При яких значеннях параметра a рівняння

$$|2|x| - 3| = x + a$$

має три розв'язки?

- 4.2." Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють нерівність:

$$(2 \sin x + 1)(2 \cos y + 3) \geq 15.$$

- 4.3." Доведіть, що при $x > 0$ виконується нерівність $x > \sin x$.

- 4.4." У колі проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD , які перетинаються в точці M . Доведіть, що пряма, яка містить висоту MK трикутника DMB , також містить медіану трикутника CMA .

Варіант 20

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $16^{-0,75} \cdot 8^{-\frac{5}{12}} \cdot 4^{\frac{5}{8}}$.

2.2. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $5 \leq 5^{1-x} < 125$?

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_{0,5}^2 x - 0,25 \log_{0,5} x^4 = 2.$$

2.4. Чому дорівнює значення $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$?

2.5. Яка область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{x+2}$?

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 \left(\frac{15}{\sqrt{5x+4}} - x \right) dx$.

2.7. У рівнобічній трапеції $ABCD$ відомо, що $AB=CD=6$ см, $BC=8$ см, $AD=12$ см. Знайдіть тангенс кута A трапеції.

2.8. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — $\sqrt{22}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

3.2. Знайдіть найбільше значення виразу $12 \sin \alpha - 5 \cos \alpha$.

3.3. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1:4. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см^2 .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{\sin x}(4 - 5\cos x - 2\sin^2 x) = 0.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x - 1} \geq 1.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$16^x - (a + 1) \cdot 4^x + 4a - 12 = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.4.^м На стороні AC трикутника ABC взято точку M . Кола, які вписано в трикутники ABM і MBC , дотикаються. Доведіть, що $AB + MC = AM + BC$.

Варіант 21

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = 91, \\ x + y = 13. \end{cases}$

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_5^2 x + 0,5 \log_5 x^2 = 6.$$

2.3. Укажіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x^2 + 3x}{4 - x} \geq 0$.

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 (4x - 3)^3 dx$.

2.5. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 6$, $b_4 = 162$.

2.6. Спростіть вираз:

$$\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha}.$$

2.7. У трикутник ABC вписано ромб $AMFK$ так, що кут A в них спільний, а вершина F належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

2.8. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На діагоналі $C_1 D$ його грані позначено точку M так, що $DM : MC_1 = 5 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AM}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть абсцису точки, у якій дотична до графіка функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x + 9$ нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt[4]{(x-2)^4} - 2x$.

3.3. Основа піраміди — ромб зі стороною a і кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть первісну функції $f(x) = \cos 2x \cos x$, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; \frac{1}{12}\right)$.

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3(3x^2 - 4x + 4) = \log_{3x} 3 + \log_{3x} x.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a нерівність

$$x^2 - (3a - 4)x + (a - 1)(2a - 3) > 0$$

виконується при всіх додатних значеннях x ?

4.4.^м Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що радіус кола, вписаного в даний трикутник, дорівнює $\frac{1}{3}$ висоти, проведеної до середньої за довжиною сторони трикутника.

Варіант 22

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Укажіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[4]{2x+16}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$2^x + 2^{2-x} = 5.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{0,4}(5x+1) < \log_{0,4}(3-2x).$$

2.4. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2-6}{x^2+4}$.

2.5. Яка область значень функції $y = -x^2 - 4x - 10$?

2.6. З міста A в місто B виїхав товарний поїзд. Через 2 год із міста A виїхав пасажирський поїзд, який прибув до міста B одночасно з товарним. Знайдіть швидкість товарного поїзда, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості пасажирського, а відстань між містами A і B становить 350 км.

2.7. Висота NE трикутника FPN ділить його сторону FP на відрізки FE і PE . Знайдіть сторону NF , якщо $EP=8$ см, $NP=17$ см, $\angle F=60^\circ$.

2.8. Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи — 5 см. На відстані 4 см від осі циліндра паралельно їй проведено площину. Знайдіть площу перерізу циліндра, який при цьому утворився.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \sin x = 2 \cos x + 1$.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{4}{x}$ та прямими $y = 4$ і $x = 4$.

3.3. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони і дорівнює 4 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 2,5 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1." Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння

$$\log_x(ax - 4) = 2$$

має єдиний розв'язок.

- 4.2." Доведіть, що $\arctg \frac{1}{3} + \arctg \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

- 4.3." Розв'яжіть нерівність:

$$3^x + 4^x \geq 5^x.$$

- 4.4." У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає гіпотенузу AB у точці E . Через точку E проведено дотичну до цього кола, яка перетинає катет BC у точці D . Доведіть, що $DE = DB$.

Варіант 23

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $9^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$?
- 2.2. Обчисліть значення виразу $9^{1-\log_3 6}$.
- 2.3. Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-2} < 122$.
- 2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = x - 1$.
- 2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2e^{-x} + \cos 3x$, графік якої проходить через точку $A(0; 2)$.
- 2.6. Знайдіть корені рівняння:
$$\sqrt{3} \sin^2 x + \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$
- 2.7. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 3 см і 5 см, рахуючи від вершини гострого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 60° .
- 2.8. Основа прямої призми — ромб з діагоналями 10 см і 24 см. Менша діагональ призми дорівнює 26 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Доведіть тотожність:
- $$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$
- 3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
- 3.3. Через гіпотенузу прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 45° . Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника з цією площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$2 \log_8 2x + \log_8 (x^2 - 6x + 9) = \frac{4}{3}.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(2^{x-1} - 1) \sqrt{x^2 + 2x - 8} \geq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} (a-1)x - 2ay = 2 - 4a, \\ ax + (a+2)y = 3 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

4.4.^м Два кола перетинаються в точках A і B . Проведено діаметри AD і AC цих кіл. Доведіть, що точки B , C і D лежать на одній прямій. (Розгляньте випадки розташування центрів кіл в одній і в різних півплощинах відносно прямої AB .)

Варіант 24

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

2.2. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{3x+2}{2x+4} \leq 1$?

2.3. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{4}}(5-3x) \geq -1$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{23-x} = x-3.$$

2.5. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = x^3 - 27x$.

2.4. Знайдіть первісну функції $f(x) = 6x^2 + e^{4x}$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$.

2.7. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 6 см, висота трапеції дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а бічна сторона утворює з основою AD кут 60° . Знайдіть основу AD трапеції.

2.8. Основою піраміди є прямокутник зі стороною a . Кут між цією стороною і діагоналлю прямокутника дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо кожне її бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a}-5}{\sqrt[4]{a}+5} - \frac{\sqrt[4]{a}+5}{\sqrt[4]{a}-5} \right) : \frac{10\sqrt[4]{a}}{25-\sqrt{a}} = 2.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_{4-x}(4-x)^2$.

3.3. У трикутнику ABC відомо, що $AB=BC$, BD і AM — висоти трикутника, $BD:AM=3:1$. Знайдіть $\cos C$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ залежно від значення параметра a .

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$x^2 + 10x - \frac{5}{|x+5|} + 29 \leq 0.$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння $5^x = 4x + 1$.

4.4.^м З точки M , що рухається по колу, опущено перпендикуляри на фіксовані діаметри AB і DC . Доведіть, що довжина відрізка, який з'єднує основи перпендикулярів, не залежить від положення точки M .

Варіант 25

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $\frac{\cos 43^\circ \cos 17^\circ - \sin 43^\circ \sin 17^\circ}{\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \sin 23^\circ}$.

2.2. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{1}{27} < 3^{2-x} \leq 27$?

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2 \log_7 4 + \log_7 0,5}{\log_7 18 - \log_7 9}$?

2.4. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{6}{\sqrt{3x+2}} + \frac{1}{|x|-1}$.

2.5. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = x^3 - 3x^2$.

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_1^{e^2} \frac{3}{x} dx$.

2.7. Знайдіть площу круга, вписаного в трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см.

2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом 120° , а з центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина хорди становить 6 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}$?

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$2 \sin x - 3 \cos x = 2.$$

3.3. Через сторону нижньої основи і середину протилежного бічного ребра правильної трикутної призми проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 45° . Площа утвореного перерізу дорівнює $16\sqrt{6}$ см². Знайдіть об'єм призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

$$\log_2 xy = \log_2(-x) + \log_2(-y) .$$

- 4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy(x-1)(y-1) = 72, \\ (x+1)(y+1) = 20. \end{cases}$$

- 4.3.^м Знайдіть найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = -x^3 + 3x|x-3|$$

на проміжку $[0; 4]$.

- 4.4.^м На стороні AC гострокутного трикутника ABC знайдіть таку точку, щоб відстань між її проекціями на дві інші сторони була найменшою.

Варіант 26

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз:

$$\left(a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot a^{0,7}b^{0,4}.$$

2.2. Розв'яжіть рівняння $3^{x+3} + 3^x = 84$.

2.3. Які координати точки перетину графіків функцій $y = \sqrt{2-x}$ і $y = x$?

2.4. Якого найбільшого значення набуває функція $f(x) = 6x^2 - x^4 - 6$?

2.5. Знайдіть третій член геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, а знаменник $q = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2.6. Катер мав подолати відстань між двома портами, що дорівнює 80 км, за певний час. Оскільки він рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж передбачалось, то запізнився на 24 хв. З якою швидкістю мав рухатися катер?

2.7. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O . Знайдіть відношення площ трикутників BOC і AOD , якщо $BC = 3$ см, $AD = 7$ см.

2.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а її діагональний переріз — рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.

3.3. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють 20 см і 30 см відповідно. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$ є непарною?
- 4.2.^м Знайдіть площу трикутника, утвореного прямою $y = 2 - x$, віссю абсцис і дотичною до параболи $y = 1 + 2x - x^2$ у точці її перетину з віссю ординат.
- 4.3.^м Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right)$.
- 4.4.^м Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці J . Навколо даного трикутника описано коло. Бісектриса кута B перетинає це коло в точці D . Доведіть, що $DJ = DA = DC$.

Варіант 27

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2.$$

2.3. Обчисліть значення виразу $\frac{\log_6 12 + \log_6 3}{2\log_3 6 - \log_3 4}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$2 \cdot 3^x + 3^{x-2} = 57.$$

2.5. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2,5x^2 + 6x - 1$.

2.6. Арифметична прогресія (a_n) задана формулою загального члена $a_n = 5n - 2$. Знайдіть суму двадцяти перших членів прогресії.

2.7. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 30 см, а радіус описаного навколо нього кола — 17 см. Обчисліть площу даного трикутника.

2.8. Точка A знаходиться на відстані 9 см від площини α . Похилі AB і AC утворюють із площиною α кути 45° і 60° відповідно, а кут між проекціями похилих на площину α дорівнює 150° . Знайдіть відстань між точками B і C .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \log_{x+4}(9 - 8x - x^2)$.

3.2. Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt[4]{x^{12}}}{x} - 3$.

3.3. Основа прямої трикутної призми — рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ бічної грані призми, яка містить бічну сторону рівнобедреного трикутника, дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 4 \ln x + ax - 3$$

не має критичних точок?

- 4.2. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^2 \frac{2^x - 1}{2^x + 1} dx$.

- 4.3.^м Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

$$|\sin x \sin y| = 1.$$

- 4.4.^м Точка M належить стороні BC трикутника ABC . Доведіть, що відношення радіусів кіл, описаних навколо трикутників AMB і MAC , не залежить від вибору точки M на стороні BC .

Варіант 28

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{\sqrt[6]{5}\sqrt[7]{5^5}}{\sqrt[7]{25}}$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$3^x \cdot 5^{x-2} = 0,04 \cdot 15^{8-3x}.$$

2.3. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin(-\alpha) - \sin^3(-\alpha)}{\sin^2(-\alpha) \cos(-\alpha)}$.

2.4. Спростіть вираз $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$.

2.5. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = (2x-1)e^{3x}$.

2.6. Теплохід пройшов 27 км за течією річки і 21 км проти течії, витративши на весь шлях 2 год. Яка швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год?

2.7. Сума зовнішніх кутів трикутника ABC , узятих по одному при вершинах A і B , дорівнює 250° . Знайдіть кут ACB .

2.8. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та віссю ординат.

3.2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{4 - x^2}$.

3.3. Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть висоту трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння
 $(x - 2) \arcsin(x - a) = 0$
має єдиний розв'язок?

4.4.^м На одній із сторін кута з вершиною в точці M вибрано точки A і B , а на другій стороні — точки C і D так, що $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D належать одному колу.

Варіант 29

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Скоротіть дріб $\frac{a - 9a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} + 3a^{\frac{1}{2}}}.$

2.2. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{4}{5}\right)^{6x+9-x^2} > \frac{16}{25}.$

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15} = 2.$$

2.4. Чому дорівнює найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ на проміжку $[2; 4]$?

2.5. Знайдіть перший додатний член арифметичної прогресії:

$$-10, 2; -9, 6; -9; \dots$$

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0.$$

2.7. З точки D , що лежить поза прямою n , проведено до цієї прямої похилі DK і DB , які утворюють із нею кути 45° і 60° відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої DK на пряму n , якщо $DB = 10\sqrt{3}$ см.

2.8. Висота конуса дорівнює 20 см, а відстань від центра його основи до твірної — 12 см. Знайдіть об'єм конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2 \lg x}{\lg(5x-4)} = 1.$$

3.2. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

3.3. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом α . Діагональний переріз призми, що проходить через більшу діагональ основи, має площу S . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2 \sin x \cos 2x} = \sqrt{5 \sin 2x - 6 \sin x}.$$

4.2.^м Визначте кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} y = a + \sqrt{x}, \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

залежно від значення параметра a .

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$4^x - (19 - 3x) \cdot 2^x + 34 - 6x = 0.$$

4.4.^м У колі, радіус якого дорівнює R , проведено дві хорди AB і CD , які перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Варіант 30

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{18}{a + 3a^{\frac{1}{2}}} - \frac{6}{a^{\frac{1}{2}}}$.

2.2. Чому дорівнює значення виразу $49^{\frac{1}{2} \log_7 36 - 2 \log_7 3}$?

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$2 \cos^2 x + \cos 2x = 0.$$

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$(5^{x-3})^{x-1} = 25^x \cdot 125^{x+1}.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = e^{2x} - \cos x$, графік якої проходить через початок координат.

2.6. Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$?

2.7. На стороні BC квадрата $ABCD$ позначено точку M так, що $\angle DAM = 60^\circ$. Знайдіть відрізок MD , якщо $AB = \sqrt{3}$ см.

2.8. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x - 3}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3.2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x+4)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$.

3.3. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її більшої бічної сторони на 15 см і 20 см. Обчисліть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{2 \cdot 5^x - 1} > 5^x - 2.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра b система

$$\begin{cases} 2x + y = a, \\ ax + y = b \end{cases}$$

має розв'язки при будь-якому значенні параметра a ?

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$(\arcsin x)(\arccos x) = -\frac{\pi^2}{9}.$$

4.4.^м Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H . Пряма, що містить висоту, проведену з вершини C , вдруге перетинає описане коло трикутника в точці K . Доведіть, що сторона AB перетинає відрізок HK в його середині.

Варіант 31

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

2.2. Знайдіть значення x , якщо $\log_7 x = \log_7 2,5 + 4 \log_7 2 - \log_7 10$.

2.3. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\sqrt{a}-8}{\sqrt{a}+8} - \frac{\sqrt{a}+8}{\sqrt{a}-8} \right) : \frac{16\sqrt{a}}{64-a}.$$

2.4. Розв'яжіть нерівність $6^{x-x^2} < \frac{1}{36}$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 8x^3 + 3x^2 - 2$, графік якої проходить через точку $A(-1; 2)$.

2.6. Число 162 є членом геометричної прогресії 2; 6; 18; Знайдіть номер цього члена.

2.7. У трикутнику ABC відомо, що $AC=BC$, $AB=2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC=30^\circ$, відрізок AD — бісектриса трикутника. Знайдіть відрізок AD .

2.8. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 240π см². Знайдіть об'єм цього конуса, якщо радіус його основи дорівнює 12 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$10^{\sin^2 x} + 10^{\cos^2 x} = 11.$$

3.2. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

3.3. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 15 см, а діагональ бічної грані — 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a) \arcsin(x - 7) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x + y + 4} + \sqrt[3]{y + 7} = 4, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_x(4 + 3x) > 2.$$

4.4.^м У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу у відношенні 2:3. Знайдіть сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$ см.

Варіант 32

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{81^{\frac{1}{3}} \cdot 27}{9^{\frac{1}{3}}}$?
- 2.2. Знайдіть корінь рівняння $0,125^x = 2 \cdot 4^x$.
- 2.3. Чому дорівнює значення виразу $\sin(2\alpha - 3\pi)$, якщо $\sin \alpha = -0,6$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$?
- 2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_8(2x + 3) > \log_8(x - 1)$.
- 2.5. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - 5x$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.
- 2.6. Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{\sqrt[3]{x} + 2} + \frac{\sqrt[3]{x} + 3}{5} = 2$.
- 2.7. У прямокутній трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $\angle D = 45^\circ$, $AC = CD = 4$ см. Чому дорівнює площа трапеції?
- 2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює a .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинні мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx$.
- 3.2. Спростіть вираз $\frac{2 \cos^2 2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}$.
- 3.3. Коло, центр якого належить стороні AB трикутника ABC , проходить через точку B , дотикається до сторони AC у точці C і перетинає сторону AB у точці D . Знайдіть більший кут трикутника ABC , якщо $AD : DB = 1 : 2$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 3a = 0$$

має два різних додатних корені?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\log_2^2 x + (x - 1) \log_2 x = 6 - 2x.$$

4.3.^м Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$ на проміжку $\left[-\frac{1}{8}; 1\right]$.

4.4.^м Діагоналі опуклого чотирикутника перпендикулярні. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, рівні.

Варіант 33

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\log_4 36 - \log_4 5 + \frac{1}{2} \log_4 \frac{25}{81}$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{(x-4)(x+3)}{x^2} \leq 0.$$

2.4. Обчисліть значення виразу:

$$\sqrt[6]{(8-\sqrt{7})^6} + \sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$, графік якої проходить через точку $M(-2;10)$.

2.6. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{1}{6}x - 7$.

2.7. Висоти паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а кут між ними — 60° . Знайдіть площу паралелограма.

2.8. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 8 см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу, градусна міра якої 120° . Знайдіть площу перерізу, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.2. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin^2 x + 0,5 \sin 2x = 1$.

3.3. Через сторону основи правильної трикутної піраміди і середину висоти проведено площину, яка утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^4 - (a - 3)x^2 + a^2 - 5a = 0$$

має три різних корені?

4.2.^м Обчисліть інтеграл:

$$\int_1^2 \sqrt{2x - x^2} \, dx .$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$3^{2x+1} - 8 \cdot 15^x + 5^{2x+1} \leq 0 .$$

4.4.^м Два кола перетинаються в точках A і B . Через точку P , яка належить відрізку AB , проведено хорду KM першого кола і хорду LN другого кола. Доведіть, що точки K, L, M, N лежать на одному колі.

Варіант 34

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\log_4 \log_9 \sqrt[4]{81}$?

2.2. Спростіть вираз $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{3x^2 + 7x - 4} = -x .$$

2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} < 0$.

2.5. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x) = 1 + 3x^2 - x^3$ на проміжку $[-1; 1]$?

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+4}}$, графік якої проходить через точку $A(4; 5)$.

2.7. У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, K — точка перетину діагоналей, $AK:KC=9:4$, $DK-BK=15$ см. Знайдіть діагональ BD .

2.8. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt{\cos x - 1} + 1$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3^2(27x) + \log_3 \frac{x^3}{9} = 17 .$$

3.3. Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$5^{1+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 24 \cdot 5^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 5 = 0.$$

4.2.^м Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 + 4$, яка перпендикулярна до прямої $x - 2y + 2 = 0$.

4.2.^м При яких натуральних значеннях n многочлен

$$P(x) = (12 - 7x^2)^n - (5x - 14)^{2n}$$

ділиться націло на многочлен $x - 2$?

4.4.^м Усередині трикутника ABC обрано точку M так, що площі трикутників AMB , BMC , AMC рівні. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC .

Варіант 35

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}})^2$.

2.2. Яка область значень функції $f(x) = 3^{\sin x}$?

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{6}}(x+4) > \log_{\frac{1}{6}}(x^2 + 2x - 2).$$

2.4. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x + \sin x = 0$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

2.6. Арифметична прогресія (a_n) задана формулою загального члена $a_n = 7 - 3n$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

2.7. Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 36 см. Точка дотику кола зі стороною BC ділить її у відношенні 2:5, рахуючи від точки B , а точка дотику зі стороною AC віддалена від точки A на 4 см. Знайдіть сторону AB .

2.8. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює 2 см. Чому дорівнює площа трикутника ADC_1 ?

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \cos^2 x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3.2. Доведіть тотожність
$$\frac{\cos\left(2\pi + \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(2\pi + \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}.$$

3.3. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 30° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3) = 0$$

має два різних корені?

4.3.^м Побудуйте графік рівняння:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 2.$$

4.4.^м Доведіть, що площу S прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S = p(p - c)$, де p — півпериметр трикутника, c — довжина гіпотенузи.

Варіант 36

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $4^{x+1} + 4^x \geq 320$.

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\frac{\left(8^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)(4 + \sqrt{2})}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})}$?

2.4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4} \leq 0$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^2 (x^2 - 2x) dx$.

2.6. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{x}{x+2}$.

2.7. У трикутник ABC вписано ромб $AKPE$ так, що кут A в них спільний, а вершина P належить стороні BC . Знайдіть сторону ромба, якщо $AB=6$ см, $AC=3$ см.

2.8. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3(4^x - 3) + \log_3(4^x - 1) = 1.$$

3.2. Число 60 подайте у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

3.3. У трикутнику ABC точка O — центр вписаного кола. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, якщо $AO=6$ см, $BO=10$ см, $\angle C=60^\circ$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$(2^x - a)\sqrt{x - 3} \geq 0.$$

- 4.2.^м** Доведіть, що при всіх дійсних значеннях x виконується нерівність:

$$e^x - 1 \geq x.$$

- 4.3.^м** Знайдіть корені рівняння:

$$\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2.$$

- 4.4.^м** Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, дорівнює піврізниці катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

Варіант 37

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Скільки цілих чисел містить множина розв'язків нерівності $x^2(x+1)(x-4) < 0$?
- 2.2. Розв'яжіть рівняння $\log_7 x - \log_7 x^2 - 3 = 0$.
- 2.3. До сплаву масою 150 кг, який містить 20 % міді, додали 10 кг міді. Який відсотковий вміст міді в новому сплаві?
- 2.4. Знайдіть корені рівняння:
 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
- 2.5. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на проміжку $[0; 3]$?
- 2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$, графік якої проходить через точку $A(1; 4)$.
- 2.7. Чому дорівнює площа паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, а одна з них перпендикулярна до його сторони?
- 2.8. Радіус основи конуса дорівнює R , а його осьовий переріз – прямокутний трикутник. Знайдіть об'єм конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$3^{2x^2-x+2} - 5^{2x^2-x-1} > 5^{2x^2-x+1} + 3^{2x^2-x-1} .$$

- 3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2 .$$

- 3.3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\cos^2 2x - a \cos 2x = 0$$

має на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ два корені?

4.2.^м Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат та дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1).$$

4.4.^м В опуклий чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABC і ADC , дотикаються одне до одного.

Варіант 38

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[6]{1 - 4x}$.

2.2. Обчисліть значення виразу $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{4}} - 49^{\frac{1}{2}}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$(0, 6)^{\frac{x^2 - 7x + 6}{x - 3}} \leq 1.$$

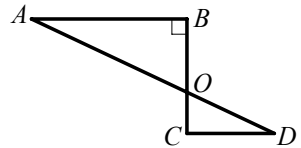
2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4$, графік якої проходить через точку $B(-1; 12)$.

2.6. Знайдіть точку максимуму функції $f(x) = x^4 - 4x^2$.

2.7. Відрізки AB і CD , зображені на рисунку, паралельні, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 24$ см, $BO = 10$ см, $CO = 5$ см. Яка довжина відрізка AD ?



2.8. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α . Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Спростіть вираз $\left(\frac{\cos \alpha}{\cos 4\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\sin 4\alpha} \right) \cdot \frac{\cos 6\alpha - \cos 10\alpha}{\sin 3\alpha}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt[6]{x^6} - 2x$.

3.3. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 9 см і 21 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}.$$

4.2.^м Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція

$$f(x) = (a - 12)x^3 + 3(a - 12)x^2 + 6x + 7$$

зростає на $\mathbb{R}$.

4.3.^м Доведіть тотожність:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.4.^м Відрізок AB є діаметром кола, а точка C лежить поза цим колом. Відрізки AC і BC перетинаються з колом у точках D і M відповідно. Знайдіть кут ACB , якщо площі трикутників DCM і ACB відносяться як 1:4.

Варіант 39

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $81^{-0.5} \cdot 27^{-\frac{7}{12}} \cdot 9^{\frac{7}{8}}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 3^x + 3^{x-2} \leq 57$.

2.3. Знайдіть область визначення функції $y = \lg \frac{3x-1}{3x+1}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$.

2.5. Знайдіть корені рівняння $\cos 2x = \cos x$.

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = 6x^2 + e^{4x}$, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{1}{2}; \frac{e^2}{4}\right)$.

2.7. Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

2.8. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить паралельно площині основи і ділить висоту піраміди у відношенні 1:2, рахуючи від вершини піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\lg^2 100x - 5 \lg x = 6.$$

3.2. Обчисліть значення виразу:

$$\sin 20^\circ \cos 70^\circ + \sin^2 110^\circ \cos^2 250^\circ + \sin^2 290^\circ \cos^2 340^\circ.$$

3.3. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1." При яких значеннях параметра a функція $f(x) = x^3 - ax^2 + 3ax + 1$ зростає на всій числовій прямій?

4.2." Розв'яжіть рівняння:

$$x^2 - 2x \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0.$$

4.3." Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \sqrt{2y-3x} = \sqrt{4-4x+y}. \end{cases}$$

4.4." У трикутнику ABC відомо, що $\angle CAB = 40^\circ$, $\angle CBA = 50^\circ$. На стороні AB побудовано квадрат, точка M — його центр, точки C і M лежать по різні сторони від прямої AB . Доведіть, що $\angle ACM = \angle MCB$.

Варіант 40

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{a^{0,5}}{a^{0,5}-5} - \frac{5}{a^{0,5}+5} + \frac{50}{25-a}$.

2.2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 - y^3 = 56. \end{cases}$

2.3. Спростіть вираз $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha}$.

2.4. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\log_{0,4} 3x > \log_{0,4} (x + 12)$?

2.5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$.

2.6. Який номер першого додатного члена арифметичної прогресії $-7,2; -6,7; -6,2; \dots$?

2.7. Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки AD і CD так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть сторону BC , якщо $\angle A = 30^\circ$.

2.8. Основа прямої призми — трикутник зі стороною c і прилеглими до неї кутами α і β . Діагональ бічної грані, що проходить через сторону основи, яка протилежна куту α , нахилена до площини основи під кутом γ . Знайдіть висоту призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

3.3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть область значень функції $y = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(\cos x - \sin x) \sqrt{3x - x^2} \geq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a) \log_2(3x - 7) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.4.^м У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відрізок CD — висота. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і DCB , відповідно дорівнюють r_1 і r_2 . Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC .

Варіант 41

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть суму десяти перших натуральних чисел, які кратні числу 7.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$3\sqrt{1-x^2} = 3-x.$$

2.3. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{\sqrt[6]{3x-8}}{3^x-27}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

2.5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \ln^3 x$ у точці $x_0 = e$.

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sin^2 4x}$.

2.7. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до його основи як 5:6, а висота трикутника, опущена на основу, дорівнює 12 см. Обчисліть периметр трикутника.

2.8. Основа прямої призми — прямокутний трикутник із катетом 6 см і гострим кутом 45° . Об'єм призми дорівнює 108 см^3 . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_5(5^x - 4) = 1 - x.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$ Користуючись

побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і спадання функції.

3.3. Через сторону квадрата проведено площину, яка утворює з площиною квадрата кут 45° . Знайдіть кут між діагоналлю квадрата і цією площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння
$$(x - a)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$?

- 4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{3x + 9 - 4\sqrt{3x + 5}} + \sqrt{3x + 14 - 6\sqrt{3x + 5}} \leq 1.$$

- 4.3.^м На параболі $y = x^2$ вибрано дві точки з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$. Через ці точки проведено пряму. Знайдіть рівняння дотичної до параболи, яка паралельна цій прямій.

- 4.4.^м Точки O і K — центри описаного і вписаного кіл гострокутного трикутника ABC відповідно. Відомо, що точки B , O , K і C лежать на одному колі. Знайдіть кут BAC .

Варіант 42

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $36 \log_2 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}}$.

2.2. Скоротіть дріб $\frac{a^2 + a - 6}{a^2 - 9}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$.

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 5) dx$.

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0.$$

2.6. При якому значенні a найменше значення функції $f(x) = x^2 - 2x + a$ дорівнює 2?

2.7. Довжини діагоналей ромба відносяться як $\sqrt{3} : 1$. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см.

2.8. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c , а один із гострих кутів дорівнює α . Знайдіть об'єм конуса, утвореного при обертанні цього трикутника навколо катета, протилежного даному куту.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{0,2}(x - 1) + \log_{0,2}(x + 3) \geq -1.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}.$$

3.3. У рівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 17$ см, відрізок BD — висота, $BD = 15$ см. Пряма, паралельна основі трикутника, перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно і розбиває даний трикутник на дві рівновеликі частини. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника MBK .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1." При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x} - a)\left(x - \frac{4}{x}\right) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.2." Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

4.3." Розв'яжіть рівняння:

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

4.4." У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо $AC=17$ см, а висота трапеції дорівнює 8 см.

Варіант 43

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$?

2.2. При якому значенні a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку $A\left(3; \frac{1}{54}\right)$?

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$2^{2x+3} + 4^x = 72.$$

2.4. Чому дорівнює перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює 0,8, а сума перших десяти членів дорівнює 22?

2.5. Знайдіть корені рівняння:

$$1 - \cos 8x = \sin 4x.$$

2.6. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \ln(2x+1)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1,5$?

2.7. Обчисліть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 5 см, а сума діагоналей — 14 см.

2.8. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC , довжини яких 15 см і 20 см відповідно. Знайдіть відстань від точки A до площини α , якщо проекції похилих на цю площину відносяться як 9:16.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x+1)^4} = 2x - 3$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt{\lg \cos x}$.

3.3. Через дві твірні конуса проведено площину, яка нахилена до площини його основи під кутом α . Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра його основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює m .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x) dx$.

4.2.^м Знайдіть корені рівняння:

$$\sin 2x + \operatorname{tg} 2x = -\frac{8}{3} \operatorname{ctg} x.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a-1)\frac{x^2}{2} - 2(a-1)x - 9$$

має додатну точку мінімуму?

4.4.^м У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1 . Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Доведіть, що відрізки BO і A_1C_1 перпендикулярні.

Варіант 44

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Яка область значень функції $y = \pi - 2 \arctg x$?

2.2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = 0.$$

2.4. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_2 (2x - 1) < \log_2 (11 - 3x).$$

2.5. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{\sqrt[4]{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt[4]{x} + 1} = 2.$

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx.$

2.7. Пряма a — спільна зовнішня дотична двох кіл, радіуси яких дорівнюють 3 см і 8 см, а відстань між їх центрами — 13 см. Знайдіть відстань між точками дотику прямої a з даними колами.

2.8. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}.$$

3.2. Доведіть тотожність:

$$1 - \cos \alpha + \sin \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

3.3. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 5:13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 9 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leq 8 \cdot 15^x.$$

4.2.^м Визначте кількість коренів рівняння

$$\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - a) = 0$$

на проміжку $[0; 2\pi)$ залежно від значення параметра a .

4.3.^м Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють нерівність $\log_x(4 - y^2) \geq 2$.

4.4.^м В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою кута BCD . Відомо, що $AB=10$ см, $BC=12$ см, $CD=18$ см, $DA=8$ см. Знайдіть кут ADC .

Варіант 45

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{7}{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{6}+1}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$9^x \cdot 27^{3-x} > \sqrt{3^x}.$$

2.3. Знайдіть корені рівняння:

$$\cos 2x + 3 \sin x = 2.$$

2.4. Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

2.5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 8} \geq 0$.

2.6. У сплаві міді й цинку маса міді становить $\frac{1}{3}$ маси цинку. Який відсотковий вміст міді в сплаві?

2.7. З точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть відстань від даної точки до прямої, якщо одна з похилих на 5 см більша за другу.

2.8. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його більшою стороною кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням даного прямокутника навколо його меншої сторони.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть значення виразу $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

3.2. Знайдіть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{7}{x}$ і прямою $x + y = 8$.

3.3. Основою піраміди $SABCD$ є квадрат $ABCD$. Бічна грань ASB перпендикулярна до площини основи, грані ASD і BSC нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть кут нахилу грані CSD до площини основи.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0.$$

4.3.^м Знайдіть корені рівняння:

$$\sqrt{-\cos 2x} = \cos x + \sin x.$$

4.3.^н Розв'яжіть рівняння:

$$\left| 3^x - 1 \right| + \left| 3^x - 9 \right| = 8.$$

4.4.^н На діаметрі AB кола з центром у точці O взято точки M і N так, що $MO=ON$. Нехай X — довільна точка даного кола. Доведіть, що сума XM^2+XN^2 не залежить від вибору точки X .

Варіант 46

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{1}{a^2 - 6a + 9} - \frac{1}{9 - a^2} \right) : \frac{2a}{a^2 - 9}.$$

2.2. Розв'яжіть рівняння $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$.

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) > -2.$$

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_1^3 (2x + 1) dx$.

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos x.$$

2.6. Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_3 + a_7 = 30$ і $a_6 + a_{16} = 60$.

2.7. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 9 см, більша діагональ — 17 см, а висота — 8 см. Чому дорівнює периметр трапеції?

2.8. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону трикутника, дорівнює d і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$.

3.2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 5x$, яка паралельна прямій $y = -x$.

3.3. Відрізок BM — медіана трикутника ABC , $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$. Знайдіть сторону AB .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_x(2x + 3) \geq 2.$$

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\left(\sqrt{5 + \sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = 10.$$

4.3.^м Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\sin x + \frac{1}{2} = 0$

і $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$ рівносильні.

4.4.^м Точка M — середина сторони AC трикутника ABC . На відрізьку MC позначили точку P . Через точку M проведено відрізок MN , паралельний прямій BP (точка N належить стороні AB). Доведіть, що відрізок NP ділить трикутник ABC на дві рівновеликі фігури.

Варіант 47

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $0,25^{-\frac{3}{2}} + 3 \cdot 81^{-\frac{1}{4}} - 0,027^{\frac{1}{3}}$.

2.2. Спростіть вираз $(1 + \cos(\pi + 2\alpha)) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2-x} = x$.

2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 6x + 9} \leq 0$.

2.5. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{2x+1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 7,5$?

2.6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + 25y^2 + 10xy = 100, \\ x - y = 4. \end{cases}$

2.7. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC , $AD = a$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$. Знайдіть відрізок BD .

2.8. Відрізок CE — медіана грані BMC піраміди $MABC$, точка K — середина відрізка CE . Виразіть вектор $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AM}$.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^{\lg x - 2} = 1000.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

3.3. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено площину, яка утворює з площиною основи конуса кут β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Обчисліть інтеграл $\int_0^5 |x-2| dx$.

4.2.^м На гіперболі $y = \frac{1}{x}$, $x < 0$, задано точку $M(x_0; y_0)$ таку, що $y_0 = \frac{1}{4}x_0$.
Знайдіть площу трикутника, утвореного дотичною до гіперболи в точці M і осями координат.

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5.$$

4.4.^м У прямокутну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$) вписано коло з центром O . Знайдіть площу трапеції, якщо $OC=6$ см, $OD=8$ см.

Варіант 48

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Подайте у вигляді степеня з раціональним показником вираз $a^{\frac{1}{4}}\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$.
- 2.2. Чому дорівнює значення виразу $2\sin^2 3\alpha + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 3\alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,2$?
- 2.3. Знайдіть значення виразу $\frac{\log_7 125 + 3\log_7 2}{\log_7 1,4 - \log_7 14}$.
- 2.4. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = e^{5x} + e^{-2x}$ у точці $x_0 = 0$.
- 2.5. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\pi} \left(2\cos 2x + \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}\right) dx$.
- 2.6. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \log_2(x^2 - 4) + \frac{1}{x-5}$.
- 2.7. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 13 см, а різниця катетів — 7 см.
- 2.8. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює φ , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо висота конуса дорівнює h і утворює з його твірною кут α .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0.$$

- 3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{3} \sin 2x.$$

- 3.3. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить його сторону BC на відрізки BM і MC завдовжки 10 см і 14 см відповідно. На відрізки якої довжини ця бісектриса ділить діагональ прямокутника?

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння $3^{2-x^2} = x^2 + 9$.

4.2.^м Знайдіть множину значень функції $f(x) = \cos x + \sqrt{-\cos^2 3x}$.

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$1 + 2 \log_{x+2} 5 \geq \log_5(x+2).$$

4.4.^м Прямі, які містять бісектриси кутів A , B , C трикутника ABC , перетинають описане навколо цього трикутника коло в точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Доведіть, що відрізки CC_1 і A_1B_1 перпендикулярні.

Варіант 49

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\arccos\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$?

2.2. Спростіть вираз $\left(\frac{15}{a-7} - a - 7\right) \cdot \frac{7-a}{a^2-16a+64}$.

2.3. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

2.4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{7^x-49}$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_1^3 (4x^3 - 4x + 1) dx$.

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_6(x-2) + \log_6(x-1) = 1.$$

2.7. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle AMB = 117^\circ$.

2.8. Площа повної поверхні конуса дорівнює 200π см², а його твірна – 17 см. Знайдіть об'єм конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 = 3x+7$.

3.2. Доведіть тотожність:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = \sin 4\alpha.$$

3.3. Основа піраміди $MABCD$ – прямокутник $ABCD$. Бічна грань $СMD$ перпендикулярна до площини основи, грані AMD і BMC нахилені до площини основи під кутом α , а грань AMB — під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть розв'язки системи рівнянь залежно від значення параметра a :

$$\begin{cases} \cos x \cos y = a^2, \\ \sin x \sin y = 1. \end{cases}$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_3(10 - 3^x) \geq 5^{\log_5(2-x)}.$$

4.3.^м При яких значеннях b і c пряма $y = 4x + 1$ дотикається до параболи $y = x^2 + bx + c$ у точці $A(1; 5)$?

4.4.^м Трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в коло. Точка O — центр цього кола. Знайдіть площу трапеції, якщо $AC = d$ і $\angle COD = 30^\circ$.

Варіант 50

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $8^{-\frac{5}{6}} \cdot 32^{1,2} \cdot 4^{-\frac{3}{4}}$?

2.2. Спростіть вираз $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $9^x - 9^{x-1} \geq 24$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$.

2.5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$ у точці $x_0 = 2$.

2.6. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[4]{20+x-x^2} + \frac{4}{x-2}$.

2.7. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

2.8. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, довжина якої дорівнює a . Ця хорда стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 90° . Кут між твірними в перерізі дорівнює 60° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 1$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^4 - 3) = 0.$$

3.3. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 6 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2(x - 3) \leq 0.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше трьох коренів рівняння $2 \cos^2 x + \cos x = 0$?

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{y}} = y - x, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутнику ABC центри описаного та вписаного кіл симетричні відносно прямої AB . Знайдіть кути трикутника ABC .

Варіант 51

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу:

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2.$$

2.2. Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-1} \geq 27$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3^2 x - 8 \log_3 \sqrt[4]{x} = 8.$$

2.4. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 8$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \sin 5x$, графік якої проходить через точку $B(\pi; 0)$.

2.6. Телевізор і мобільний телефон коштували разом 1800 грн. Після того як телевізор подорожчав на 10 %, а телефон подешевшав на 10 %, вони стали коштувати разом 1840 грн. Знайдіть початкову ціну телевізора.

2.7. У трикутнику ABC відомо, що $AB : AC = 3\sqrt{2} : 7$, $\angle BAC = 45^\circ$. Знайдіть сторону AC , якщо $BC = 30$ см.

2.8. Довжина лінії перетину сфери і площини, яка віддалена від її центра на 12 см, дорівнює 10π см. Знайдіть площу сфери.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}} + 3$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2.$$

3.3. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом β при основі. Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють α . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} |x| + y - 4 = 0, \\ (y - a)^2 + x^2 = 9 \end{cases}$$

має один розв'язок?

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{3}}^2 3x + \log_3 \frac{x^2}{9} \geq 4.$$

4.3.^м Знайдіть спільні точки графіків функцій $f(x) = x^3 + 2x + 1$ і $g(x) = (x + 1)^2$, у яких ці графіки мають спільні дотичні.

4.4.^м У трикутнику ABC медіана BM ділить відрізок AK (точка K належить стороні BC) у відношенні $3:1$, рахуючи від вершини A . У якому відношенні точка K ділить сторону BC ?

Варіант 52

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 27, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

2.2. Чому дорівнює $\sin \alpha$, якщо $\cos \alpha = 0,8$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$?

2.3. Обчисліть значення виразу $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{3 \log_6 2 + \log_6 27}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

2.5. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ на проміжку $[0; 2]$?

2.6. Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які менші від 160 і діляться націло на 3.

2.7. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O . Знайдіть відрізок AO , якщо $AD:BC=3:2$, $CO=8$ см.

2.8. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо відстань від центра основи до проведеної хорди дорівнює d .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = 6 - x^2$ і прямою $y = 5$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4.$$

3.3. Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 25 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a число π є періодом функції

$$f(x) = \frac{\cos x}{a + \sin x} ?$$

- 4.2.^м Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

$$\log_2(x^2 - 2x + 3)\log_3(y^2 + 4y + 7) = 1.$$

- 4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 10y = -49, \\ y^2 + 6z = 7, \\ z^2 - 2x = 7. \end{cases}$$

- 4.4.^м У трикутнику ABC бісектриси AA_1 і CC_1 перетинаються в точці O , $\angle ABC = 60^\circ$. Доведіть, що $\angle C_1OB = \angle C_1A_1B$.

Варіант 53

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $(1 + \operatorname{ctg} \beta)^2 + (1 - \operatorname{ctg} \beta)^2$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{(x+8)(x-3)}{x-9} \leq 0.$$

2.3. Спростіть вираз $\frac{y-25}{3y^{\frac{1}{2}}+9} \cdot \frac{y^{\frac{1}{2}}+3}{y^{\frac{1}{2}}-5}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_4(x+3) + \log_4(x+15) = 3.$$

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{8x+1}} - 2 \right) dx$.

2.6. Розв'яжіть нерівність:

$$9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leq 0.$$

2.7. Більша основа трапеції дорівнює 20 см, а відстань між серединами її діагоналей — 6 см. Яка довжина меншої основи трапеції?

2.8. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а діагональний переріз є прямокутним трикутником.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}$.

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = e^{-x^2}$.

3.3. У правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основи дорівнює $8\sqrt{2}$ см, а бічне ребро — 3 см. Через діагональ BD нижньої основи і середину сторони $B_1 C_1$ верхньої проведено площину. Знайдіть площу утвореного перерізу призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0$$

має на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ три корені?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$3^x = 4x + 1.$$

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}, \\ xyz = 8. \end{cases}$$

4.4.^м Два паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ розташовані так, що точка B — середина відрізка AB_1 , точка C — середина відрізка BC_1 , точка D — середина відрізка CD_1 , точка A — середина відрізка DA_1 . Знайдіть площу паралелограма $A_1B_1C_1D_1$, якщо площа паралелограма $ABCD$ дорівнює S .

Варіант 54

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть рівняння $64^x - 7 \cdot 8^x - 8 = 0$.

2.2. Чому дорівнює значення виразу $3^{3 \log_3 2} - 2^{\frac{1}{2} \log_2 16}$?

2.3. Спростіть вираз $\left(\frac{b^{-\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{7}{18}}} \cdot \frac{b^{\frac{2}{7}}}{b^{-\frac{5}{7}}} \right)^9$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{9 - 8x} = -x$.

2.5. Спростіть вираз $\frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha - \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha + \cos 2\alpha}$.

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{14}{\sqrt{7x+2}} + 3x^2$, графік якої проходить через точку $C(2; 0)$.

2.7. У трикутнику ABC сторона AC поділена на три рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні стороні AB трикутника. Менший із відрізків цих прямих, які знаходяться між сторонами трикутника, менший від сторони AB на 8 см. Знайдіть сторону AB трикутника.

2.8. Основа прямої трикутної призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Діагональ бічної грані призми, яка містить основу рівнобедреного трикутника, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos 3x$.

3.2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 - x + 3$, яка паралельна прямій $x + y + 3 = 0$.

3.3. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, лежить на її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо бічна сторона трапеції дорівнює 2 см, а висота трапеції — 1,6 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Скільки розв'язків має рівняння

$$(\log_3(x-2) - 2)\sqrt{x-a} = 0$$

залежно від значення параметра a ?

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x-1)\sqrt{x^2+1} \leq x^2-1.$$

4.3.^м Побудуйте графік функції:

$$y = \frac{1}{\cos^2(\arctg x)}.$$

4.4.^м Діагональ опуклого чотирикутника ділить його на два рівновеликих трикутники. Доведіть, що ця діагональ ділить навпіл відрізок, який з'єднує середини двох протилежних сторін чотирикутника.

Варіант 55

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}-4} - \frac{\sqrt[6]{b}}{\sqrt[6]{b}+2}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_2(3x+2) < \log_2 5 + 4.$$

2.4. Розв'яжіть рівняння $2 \sin^2 x = 3 \cos x$.

2.5. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = x^3 - x^2 - x + 8$.

2.6. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{3x-5}{x+3} \leq 1$?

2.7. Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його більшої сторони.

2.8. Паралельно осі циліндра проведено площину. Переріз, що утворився, є квадратом і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює 90° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = 2 - x$.

3.2. Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{2x + 8 - x^2} = 0$.

3.3. Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Бічне ребро, яке проходить через вершину іншого гострого кута основи, перпендикулярне до площини основи і дорівнює h , а бічна грань, яка містить катет, прилеглий до даного кута α , нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a нерівність

$$\cos^2 x - (2a - 1) \cos x + a^2 - a > 0$$

виконується при всіх дійсних значеннях x ?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$|\lg x + 1| + |\lg x - 3| = 4.$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{6x-2}.$$

4.4.^м У паралелограмі $ABCD$ на сторонах AB і AD позначено відповідно точки N і F так, що $BN:NA=1:1$ і $DF:FA=3:1$. Відрізки BF і CN перетинаються в точці M . Знайдіть відношення $NM:MC$.

Варіант 56

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{4a^{-\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}} - 3a^{-\frac{1}{4}}}$ при $a = 2$?
- 2.2. Розв'яжіть нерівність $125^x \cdot 5^{x^2-x+3} < 125$.
- 2.3. Обчисліть значення виразу $6^{\log_6 \sqrt{2} + \frac{1}{3} \log_6 27}$.
- 2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\frac{3-x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} = 4\frac{1}{4}$.
- 2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{12}{\sqrt{4x-3}}$, графік якої проходить через точку $A(3; 18)$.
- 2.6. Катер пройшов 40 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на шлях проти течії на 20 хв більше, ніж на шлях за течією. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.
- 2.7. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один із її кутів дорівнює 150° .
- 2.8. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною a і тупим кутом α . Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$.
- 3.2. Доведіть тотожність:
- $$\frac{\left(\cos(2\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + 5\alpha)\right)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)} = \sin 4\alpha.$$
- 3.3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см, а медіана, проведена до цієї сторони, — 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Визначте кількість розв'язків рівняння

$$\left| 1 - \sqrt{|x+3|} \right| = a$$

залежно від значення параметра a .

- 4.2.^м Доведіть, що при $x > 0$ виконується рівність:

$$\operatorname{arccotg} x + \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

- 4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\log_{3x} x^3 - \log_{9x} x^2 = 0.$$

- 4.4.^м На катеті BC прямокутного трикутника ABC взято довільну точку M . З точки M проведено перпендикуляр MN до гіпотенузи AB . Доведіть, що $\angle ANC = \angle AMC$.

Варіант 57

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $8^{\frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}}$.

2.2. Спростіть вираз $\frac{2y^{\frac{1}{4}} - 5}{5y^{\frac{1}{4}}} : \frac{4y^{\frac{1}{2}} - 25}{5y^{\frac{1}{2}}}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$4^x + 4^{1-x} = 5.$$

2.4. Яка область визначення функції $f(x) = \frac{5}{\sqrt{4x-12}} - \frac{7}{x^2-16}$?

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, графік якої проходить через точку $M(1; -2)$.

2.6. Які три додатних числа треба вставити між числами 2 і 162, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію?

2.7. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

2.8. Об'єм конуса дорівнює $100\pi \text{ см}^3$, висота — 12 см. Обчисліть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 0,2x^2 + 4x - 5$, яка паралельна прямій $y = 6x - 3$.

3.2. Спростіть вираз $\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \cdot 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} + 2$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

3.3. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Залежно від значень параметра a знайдіть критичні точки функції $f(x) = (3x - 2)\sqrt[6]{x - a}$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{2x - 20} + \sqrt{x + 15} \geq 5.$$

4.3.^м Побудуйте графік функції $y = \arccos \sqrt{x} + \arccos \sqrt{1 - x}$.

4.4.^м У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут при вершині дорівнює 108° . У цьому трикутнику проведено бісектриси AA_1 і BB_1 . Доведіть, що $AA_1 = 2BB_1$.

Варіант 58

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{a^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}} : \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}}$.

2.2. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \beta + \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$6^{x+2} - 4 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 6^x = 120.$$

2.4. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 6, а різниця дорівнює -2 . Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їх сума дорівнювала -30 ?

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x + 78} - x = 6.$$

2.6. Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \frac{x^4}{2} - 9x^2$ на проміжку $[-1; 2]$.

2.7. Висота NF трикутника MNK ділить його сторону MK на відрізки MF і FK . Знайдіть відрізок MN , якщо $FK = 6\sqrt{3}$ см, $MF = 8$ см, $\angle K = 30^\circ$.

2.8. Обчисліть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює $8\sqrt{2}$ см і нахилена до площини основи під кутом 45° .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 2x + 1$ та $x = 3$.

3.2. Розв'яжіть нерівність $\lg^2 10x - \lg x \geq 3$.

3.3. Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) ділить катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A , C і точку перетину даної бісектриси з катетом BC .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких раціональних значеннях параметрів a і b один із коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx - 16 = 0$ дорівнює $\sqrt{2} + 1$?

4.2.^м Скільки коренів рівняння

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{1 - \cos x} = 0$$

належить проміжку $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$?

4.3.^м Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x; y)$, які задовольняють нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 18} \cdot \sqrt{y^2 + 14y + 50} \leq 3.$$

4.4.^м Доведіть, що радіус r кола, вписаного в прямокутну трапецію, обчислюється за формулою $r = \frac{ab}{a+b}$, де a і b — довжини основ трапеції.

Варіант 59

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть рівняння $9^x - 9 = 8 \cdot 3^x$.

2.2. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = e^{-2x} + e^{\frac{x}{2}}$ у точці $x_0 = 0$.

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\left(\frac{16^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}}{4^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{1}{9}}} \right)^{-1}$?

2.4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x-9}}$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} + x \right) dx$.

2.6. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha}$.

2.7. З точки M , що лежить поза прямою l , проведено до цієї прямої похилі MN і MK , які утворюють з нею кути 30° і 45° відповідно. Знайдіть похилу MK , якщо довжина проекції похилої MN на пряму l дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

2.8. Через кінець M радіуса OM кулі проведено площину, яка утворює з цим радіусом кут 30° . Площа утвореного перерізу дорівнює 36π см². Знайдіть площу поверхні кулі.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $x^{\log_3 x} = 81$.

3.2. Побудуйте графік функції $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.

3.3. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом α . Знайдіть двогранний кут при ребрі основи піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{x+2} = 4.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^3 - 13x^2 + ax - 27 = 0$$

має три дійсних корені, які утворюють геометричну прогресію?

4.3.^м Доведіть, що $\cos \frac{2\pi}{21} + \cos \frac{4\pi}{21} + \cos \frac{6\pi}{21} + \dots + \cos \frac{20\pi}{21} = -\frac{1}{2}$.

4.4.^м На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $BD:DC=2:3$. У якому відношенні відрізок AD ділить медіану BM ?

Варіант 60

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{4+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4-2\sqrt{3}}$.
- 2.2. Спростіть вираз $\frac{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}$.
- 2.3. Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.
- 2.4. Обчисліть значення виразу $100^{\frac{1}{3} \lg 27 - \lg 5}$.
- 2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{4}{\sin^2 4x}$, графік якої проходить через точку $B\left(\frac{\pi}{24}; -2\sqrt{3}\right)$.
- 2.6. Першому маляру потрібно на 4 год більше, щоб пофарбувати кімнату, ніж другому. Якщо перший маляр пропрацює 3 год, а потім його змінить другий, то останній дофарбує цю кімнату за 6 год. За скільки годин може пофарбувати всю кімнату другий маляр?
- 2.7. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E . Більша основа AD трапеції дорівнює 12 см, $AE = 15$ см, $BE = 5$ см. Знайдіть меншу основу трапеції.
- 2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, довжина якої дорівнює b . Цю хорду видно із центра нижньої основи під кутом β , а відрізок, який сполучає центр верхньої основи із серединою проведеної хорди, утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$.
- 3.2. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x-2}{1-x} > -1$.
- 3.3. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один з катетів — 5 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його більшого гострого кута.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівняння:

$$\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2xy - 1} = y + x.$$

- 4.2.^м При яких значеннях параметра a функція $y = f(x + a)$ є непарною, якщо $f(x) = 2^x - \frac{8}{2^x}$?

- 4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5. \end{cases}$$

- 4.4.^м Точки M і N – середини діагоналей AC і BD опуклого чотирикутника $ABCD$ ($AD > BC$). Відомо, що $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Доведіть, що даний чотирикутник — трапеція.

Варіант 61

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt[6]{ab} + 3\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} + 6\sqrt[6]{ab} + 9\sqrt[3]{b}}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{4} \cdot 2^{2x^2} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$.

2.3. Спростіть вираз:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(2\pi - \alpha) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\pi - \alpha).$$

2.4. Обчисліть значення виразу $\left(\log_{14} 2 + \log_{14} 7 + 5^{\log_5 6}\right)^{\log_7 2}$.

2.5. Дано функцію $f(x) = e^x \sin 3x$. Знайдіть $f'(0)$.

2.6. Катер проплив 15 км за течією річки і 4 км по озеру, витративши на весь шлях 1 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

2.7. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини проекцій яких на цю пряму дорівнюють 6 см і 15 см. Знайдіть довжини похилих, якщо вони відносяться як 10:17.

2.8. Діагональ куба дорівнює a . Чому дорівнює об'єм куба?

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \log_3 \log_{x-2}(x-2)^9$.

3.3. Основа піраміди — прямокутний трикутник, катет якого дорівнює b , а протилежний гострий кут — β . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню конуса, описаного навколо даної піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Побудуйте графік функції $y = \cos(2 \arccos x)$.

4.2.^м Залежно від значення параметра a знайдіть точку максимуму функції:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a+2}{2}x^2 + 2ax + 4.$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{\frac{x^3 + 27}{x}} > x - 3.$$

4.4.^м Точки P , Q , R належать сторонам AB , BC , CA трикутника ABC відповідно. Відомо, що $AP:AB=BQ:BC=CR:CA=1:4$. Площа трикутника ABC дорівнює S . Знайдіть площу трикутника PQR .

Варіант 62

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{8}}}$ при $a = 16$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\cos^2 x - \sin x \cos x = 0.$$

2.3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy - x = 30, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

2.4. Обчисліть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_{12} = 52$, а різниця прогресії $d = 5$.

2.5. Розв'яжіть нерівність $(\sin 1)^{\frac{4x-3}{x+6}} \geq (\sin 1)^{\frac{5}{x+6}}$.

2.6. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5$.

2.7. Периметр ромба дорівнює 60 см, а його діагоналі відносяться як 3 : 4. Знайдіть площу ромба.

2.8. Хорду нижньої основи циліндра видно із центра цієї основи під кутом α . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи і середину даної хорди, нахилений до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус основи дорівнює R .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_6(x+1) + \log_6(2x+1) < 1.$$

3.2. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 3x + 4$ і прямою $y = 4 - x$.

3.3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 8 см і 15 см. Знайдіть відстань від вершини більшого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Спростіть вираз:

$$\sqrt{b-2\sqrt{b+8}+9} + \sqrt{b+2\sqrt{b+8}+9}.$$

4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\arccos^2 x - (7a - 7)\arccos x + 2a(5a - 7) = 0$$

має розв'язки?

4.4.^м У трикутник ABC , периметр якого дорівнює $2p$, вписано коло. Дотична до цього кола перетинає сторони AB і BC у точках K і L відповідно. Знайдіть периметр трикутника KBL , якщо $AC=b$.

Варіант 63

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $(2^{-0,7})^{-0,7} \cdot (0,5)^{3,49}$?

2.2. Розв'яжіть нерівність $4^{x+1} + 4^x \geq 80$.

2.3. Знайдіть значення $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_4 \frac{1}{x^2} + 4 \log_4 x = -3 .$$

2.5. Геометрична прогресія (b_n) задана формулою загального члена $b_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. Знайдіть суму п'яти перших членів прогресії.

2.6. Щоб отримати 50 кг 46-відсоткового сплаву цинку, взяли його 40-відсотковий і 50-відсотковий сплави. Скільки взяли кілограмів 40-відсоткового сплаву?

2.7. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F . Знайдіть відрізок AB , якщо $AF = 10$ см і $BC : AD = 2 : 5$.

2.8. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює l .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 2x + 1$ і прямою $y = x + 3$.

3.2. Спростіть вираз:

$$\sqrt{(\sqrt{b}-1)^2 + 4\sqrt{b}} - \sqrt{(\sqrt{b}+1)^2 - 4\sqrt{b}} .$$

3.3. Основа піраміди — квадрат зі стороною 9 см, а дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо середнє за довжиною бічне ребро піраміди дорівнює 15 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Скільки критичних точок має функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

на проміжку $[-a; a]$ залежно від значення параметра a ($a > 0$) ?

4.2.^м Доведіть тотожність:

$$\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{6}{x-y}, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 і CC_1 . Відомо, що $\angle A_1CC_1 = \angle C_1AA_1$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

Варіант 64

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $81^{0,25} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + (0,5)^{-2}$.

2.2. Знайдіть корінь рівняння $8^{x+2} - 8^x = 126$.

2.3. Спростіть вираз:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}.$$

2.4. Розв'яжіть нерівність:

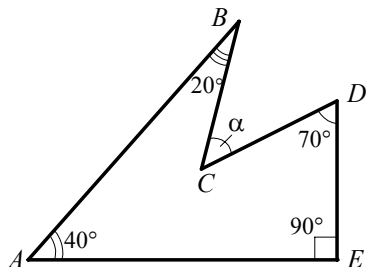
$$\log_4(x+3) + \log_4(x+15) \leq 3.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \sin \frac{x}{4}$, графік якої проходить через початок координат.

2.6. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 3x}{3x + 1}}$.

2.7. Визначте величину кута α , зображеного на рисунку.

2.8. Кут при основі осьового перерізу конуса дорівнює β , а відстань від центра основи до середини твірної дорівнює a . Знайдіть об'єм конуса.



Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \operatorname{ctg} x |\sin x|$.

3.3. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагональ — 20 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leq 0.$$

4.2.^м Доведіть, що функція $f(x) = \cos x \cos(x\sqrt{2})$ не є періодичною.

4.3.^м Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 x^3 \cos x dx$.

4.4.^м Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей. Доведіть, що відрізки, які з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника, рівні.

Варіант 65

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть область значень функції $f(x) = x^2 + 8x - 3$.

2.2. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}+2} - \frac{\sqrt{m}+2}{\sqrt{m}-2} \right) : \frac{8\sqrt{m}}{m-4}.$$

2.3. Розв'яжіть рівняння $\frac{8}{5^x-3} - \frac{6}{5^x+1} = 3$.

2.4. До басейну підведено дві труби, через які його можна наповнити за 4 год. Якщо відкрити тільки першу трубу, то басейн наповниться за 6 год. За скільки годин можна наповнити басейн, якщо відкрити тільки другу трубу?

2.5. Знайдіть найменше значення функції $y = \frac{9}{x} + x$ на проміжку $[-4; -1]$.

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$1 - \sin 2x = (\cos 2x + \sin 2x)^2.$$

2.7. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу трапеції.

2.8. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC , які утворюють з площиною кути, що дорівнюють 60° . Знайдіть відстань між точками B і C , якщо $\angle BAC = 90^\circ$, а відстань від точки A до площини α дорівнює 3 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 2 - x$.

3.2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\log_{0,6} \frac{x+2}{x-3}}$.

3.3. Основа прямої призми — ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Через меншу діагональ нижньої основи і вершину гострого кута верхньої основи проведено площину, яка утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+9}{x+5}$, яка проходить через точку $O(0; 0)$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 3x} < 5 - x.$$

4.3.^м Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння

$$a^2 \cos \frac{3\pi x}{2} - a|x| = 1$$

має єдиний розв'язок.

4.4.^м Коло, побудоване на більшій основі трапеції як на діаметрі, дотикається до меншої основи, перетинає бічні сторони і ділить їх навпіл. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо радіус кола дорівнює R .

Варіант 66

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{5})(\sqrt[4]{7} - \sqrt[4]{5})$?
- 2.2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + 5x - 24} = 4 - x$.
- 2.3. Обчисліть значення виразу $6^{2-\log_6 9} - 25^{\log_5 3}$.
- 2.4. При якому від'ємному значенні x значення виразів $2x - 3$, $x - 4$, $x + 2$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?
- 2.5. Яка область визначення функції $y = \log_{\pi} \frac{2-3x}{x-3}$?
- 2.6. Обчисліть інтеграл $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-x} dx$.
- 2.7. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см і ділить її на дві частини, одна з яких, прилегла до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.
- 2.8. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди утворює з площиною основи кут β . Відрізок, який сполучає середину висоти піраміди і середину бічного ребра, дорівнює b . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|3^x - 27|}{27 - 3^x}$.
- 3.2. Доведіть тотожність:
- $$\left(\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4} + \operatorname{tg}(2\pi - \beta)\right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{17\pi}{4} + \operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{2} - \beta\right)\right)^2 = \frac{2}{\cos^2 \beta}.$$
- 3.3. Точка перетину бісектрис тупих кутів при меншій основі трапеції належить більшій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sin x \cdot \sqrt{5x - 4 - x^2} \leq 0.$$

4.2.^м Знайдіть найменше значення функції $f(x) = x^2 + |2x - 1|$ на проміжку $[0; 1]$.

4.3.^м Пряма $y = 4x + 1$ дотикається до параболи $y = x^2 + bx + c$ у точці $M(1; 5)$. Знайдіть рівняння параболи.

4.4.^м Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Відомо, що $S_{BCO} = 1 \text{ см}^2$, $S_{AOD} = 9 \text{ см}^2$, $S_{ABCD} \leq 16 \text{ см}^2$. Знайдіть площі трикутників ABO і COD .

Варіант 67

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть корені рівняння $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

2.2. Обчисліть значення виразу $2^{\lg 7} \cdot 5^{\lg 7}$.

2.3. Спростіть вираз $\frac{a + 7a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{7}{8}} + 7} - \frac{a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}}}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} + x$, графік якої проходить через точку $M(4; -3)$.

2.6. Човен, власна швидкість якого дорівнює 6 км/год, проплив 8 км за течією річки на 1 год швидше, ніж таку саму відстань проти течії річки. Знайдіть швидкість течії річки.

2.7. Пряма, яка паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає його сторону AB у точці M , а сторону BC — у точці K , $BK=2$ см, $AC=12$ см, $MK=KC$. Знайдіть сторону BC .

2.8. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 15 см, а апофема — 17 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність:

$$\frac{\sin^2 2\alpha - 4 \cos^2 \alpha}{\sin^2 2\alpha + 4 \cos^2 \alpha - 4} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3$.

3.3. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Діагональ бічної грані, що містить катет, протилежний куту α , нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо даної призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x^2 + x - 2)\sqrt{\sin x} \leq 0.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 > 0.$$

4.3.^м Скільки критичних точок має функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

на проміжку $[-2; 0]$ залежно від значення параметра a ?

4.4.^м Через точку перетину медіан трикутника ABC проведено відрізок EF паралельно стороні AB . Знайдіть площу чотирикутника $ABFE$, якщо $AB = EF$ і площа трикутника ABC дорівнює S .

Варіант 68

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $\frac{\left(m^8 n^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}}{m^{\frac{1}{3}} n^{\frac{19}{18}}}$ при $m = 14$, $n = 16$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{4}{7}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{8-6x}$.

2.3. Спростіть вираз $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 + x - 16} = \sqrt{-5x}$.

2.5. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$ у точці $x_0 = 5$.

2.6. Катер пройшов 24 км за течією річки на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.

2.7. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90^\circ$) позначено точку K . Знайдіть площу трикутника KBC , якщо $AK = 8$ см, $BK = 17$ см, $BC = 25$ см.

2.8. В основі конуса проведено хорду завдовжки 12 см, яку видно із центра основи під кутом 120° . Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 8 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 3.$$

3.2. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{4}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, на дві рівновеликі частини?

3.3. У рівнобедрений трикутник вписано коло, центр якого віддалений від вершини рівнобедреного трикутника на 51 см, а точка дотику ділить бічну сторону на відрізки, довжини яких відносяться як 8:9, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть площу цього трикутника.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$25^x + (a-1) \cdot 5^x + a - 2a^2 = 0$$

має два різних дійсних корені?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

4.3.^м Доведіть нерівність:

$$2^{n+1} > 2n + 3, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

4.4.^м У трикутнику ABC точка D — основа бісектриси, проведеної з вершини C , $\angle ACB = 120^\circ$. Доведіть, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{CD}$.

Варіант 69

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $\left(\sqrt[4]{49} + \sqrt[5]{125}\right)\left(\sqrt[4]{49} - \sqrt[5]{125}\right)$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$25^{7-5x} \leq 0,008^{3x-1}.$$

2.3. Знайдіть первісну функції $f(x) = 6e^{3x-2}$, графік якої проходить через точку $A(1; 5e)$.

2.4. Розв'яжіть рівняння $\log_2 4x \cdot \log_2 \frac{x}{4} = 5$.

2.5. Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює -8 , а сума перших десяти членів дорівнює 190 ?

2.6. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x) = \frac{3x-2}{x+3}$.

2.7. Одна з діагоналей трапеції та її основи дорівнюють відповідно 40 см, 18 см і 30 см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей ділить дану діагональ.

2.8. Висота конуса дорівнює 10 см, а кут, який утворює твірна конуса з площиною основи, — 45° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+14} - \sqrt{3x+1} = 2$.

3.3. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α , а з площиною бічної грані — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$|2|x| - 5| = a - x$$

має три розв'язки?

- 4.2.^м Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють нерівність:

$$(3 \cos x - 1)(3 \sin y + 2) \geq 10.$$

- 4.3.^м Доведіть, що при $x < 0$ виконується нерівність $x < \sin x$.

- 4.4.^м У колі проведено дві перпендикулярні хорди AB і CD , які перетинаються в точці M . Доведіть, що пряма, яка містить медіану MK трикутника DMB , також містить висоту трикутника CMA .

Варіант 70

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $625^{-2,25} \cdot 25^{-\frac{2}{3}} \cdot 125^{\frac{25}{9}}$.

2.2. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{6} < 6^{3-x} \leq 36$?

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_{0,2}^2 x + 0,5 \log_{0,2} x^2 = 2.$$

2.4. Чому дорівнює значення $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?

2.5. Яка область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+3}$?

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 \left(\frac{14}{\sqrt{7x+9}} - 2 \right) dx$.

2.7. У прямокутній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $\angle A = 90^\circ$) відомо, що $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AD = 10$ см. Знайдіть синус кута D трапеції.

2.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, а висота піраміди — $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

3.2. Знайдіть найменше значення виразу $15 \sin \alpha + 8 \cos \alpha$.

3.3. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 2:7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 108 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{\cos x}(8\sin x + 5 - 2\cos 2x) = 0.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{3x - 2} \geq 1.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$36^x - (a + 5) \cdot 6^x + 6a - 6 = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.4.^м На стороні AC трикутника ABC взято точку M так, що $AB + MC = AM + BC$. Доведіть, що кола, вписані в трикутники ABM і MBC , дотикаються.

Варіант 71

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -12, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3^2 x - \frac{1}{2} \log_3 x^2 = 2.$$

2.3. Укажіть найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{6x-x^2}{x+5} \leq 0$.

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^0 (2x+1)^4 dx$.

2.5. Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = 12$, $b_4 = 96$.

2.6. Спростіть вираз $\frac{(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha)}{1 - \cos 8\alpha}$.

2.7. У трикутник ABC вписано ромб $CMKD$ так, що кут C у них спільний, а вершина K належить стороні AB . Знайдіть сторону BC , якщо $AC = 12$ см, а сторона ромба дорівнює 4 см.

2.8. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На діагоналі AD_1 його грані позначено точку E так, що $AE : ED_1 = 2 : 7$. Виразіть вектор $\overrightarrow{BE}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть абсцису точки, у якій дотична до графіка функції $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 7$ нахилена до осі абсцис під кутом $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt[6]{(x+3)^6} + 2x$.

3.3. Основа піраміди — ромб з кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи піраміди дорівнюють φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть первісну функції $f(x) = \sin 3x \cos 2x$, графік якої проходить через точку $K\left(0; -\frac{3}{5}\right)$.

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\log_2(2x^2 - 3x + 3) = \log_{2x} 2 + \log_{2x} x.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a нерівність

$$x^2 - (4a + 1)x + (a + 2)(3a - 1) > 0$$

виконується при всіх від'ємних значеннях x ?

4.4.^м Радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює $\frac{1}{3}$ однієї з його висот.

Доведіть, що довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію.

Варіант 72

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Укажіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[6]{3x+9}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$3^x + 3^{2-x} = 10.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{0,3}(2-3x) > \log_{0,3}(5x-1).$$

2.4. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-7}$.

2.5. Укажіть область значень функції $y = -x^2 - 2x + 3$.

2.6. Відстань між пунктами A і B становить 40 км. Автобус проїхав з A в B і повернувся назад. Повертався він зі швидкістю на 10 км/год меншою від початкової і витратив на зворотний шлях на 20 хв більше, ніж на шлях з A в B . Знайдіть початкову швидкість автобуса.

2.7. Висота AM трикутника ABC ділить його сторону BC на відрізки BM і MC . Знайдіть відрізок MC , якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45^\circ$.

2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду завдовжки 8 см, яка знаходиться на відстані 3 см від центра цієї основи. Знайдіть площу осевого перерізу циліндра, якщо його висота дорівнює 6 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1.$$

3.2. Обчисліть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{3}{x}$ та прямими $y = 3$ і $x = 3$.

3.3. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння

$$\log_x(ax-9)=2$$

має єдиний розв'язок.

- 4.2.^м Доведіть, що $\arctg \frac{2}{3} + \arctg \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

- 4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$5^x + 12^x \leq 13^x.$$

- 4.4.^м Дотична в точці A до кола, яке описане навколо трикутника ABC , перетинає пряму BC у точці D , відрізок AE — бісектриса трикутника ABC . Доведіть, що $AD=DE$.

Варіант 73

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $36^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-0,5} - 1000^{\frac{1}{3}}$?

2.2. Обчисліть значення виразу $25^{1+\log_5 2}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $3^x - 4 \cdot 3^{x-2} > 15$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x^2 + 8x + 7} = x + 1.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3e^{3x} + \sin 2x$, графік якої проходить через точку $B(0; 3)$.

2.6. Знайдіть корені рівняння:

$$\sqrt{3} \sin^2 x - \sin 2x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

2.7. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону на відрізки завдовжки 6 см і 2 см, рахуючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма, якщо його гострий кут дорівнює 30° .

2.8. Основа прямої призми — ромб з діагоналями 16 см і 30 см. Більша діагональ призми дорівнює 50 см. Обчисліть площу бічної поверхні призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність:

$$(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$.

3.3. Через катет прямокутного рівнобедреного трикутника проведено площину, яка утворює з площиною трикутника кут 60° . Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника з цією площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$2 \log_{27} 3x + \log_{27} (x^2 - 4x + 4) = \frac{2}{3}.$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(3^{x-2} - 1) \sqrt{x^2 - 2x - 8} \geq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} (a+3)x + 4y = 3a - 5, \\ ax + (a-1)y = 2 \end{cases}$$

не має розв'язків?

4.4.^м Два кола перетинаються в точках A і B . Через точку B проведено січну, яка перетинає кола в точках C і D . Доведіть, що величина кута CAD є сталою для будь-якої січної, яка проходить через точку B . (Розгляньте випадки розташування точок C і D в одній і в різних півплощинах відносно прямої AB .)

Варіант 74

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

2.2. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{3x-8}{x-2} \leq 2$?

2.3. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{5}}(1-2x) \geq -2$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{19-2x} = x-2.$$

2.5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = x^3 - 48x$.

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = 8x^3 - e^{\frac{x}{2}}$, графік якої проходить через точку $B(1; -2\sqrt{e})$.

2.7. У рівнобічній трапеції $ABCD$ основи AD і BC відповідно дорівнюють 18 см і 12 см. Бічна сторона трапеції утворює з її основою кут 30° . Знайдіть діагональ трапеції.

2.8. Основою піраміди є прямокутник з діагоналлю d . Кут між стороною і діагоналлю прямокутника дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо кожне її бічне ребро нахилене до площини основи під кутом β .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{b}+4}{\sqrt[4]{b}-4} + \frac{\sqrt[4]{b}-4}{\sqrt[4]{b}+4} \right) : \frac{4\sqrt{b}+64}{16-\sqrt{b}} = -\frac{1}{2}.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \log_{x+1}(x+1)^9$.

3.3. У трикутнику ABC відомо, що $AB=BC$, відрізки BD і CK — висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK:BD$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значення параметра a .

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$x^2 - 8x - \frac{3}{|x-4|} + 18 \leq 0.$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння $6^x = 5x + 1$.

4.4.^м У середині кута AOB позначено точку M , проекціями якої на прямі OA і OB є точки M_1 і M_2 . Доведіть, що $M_1M_2 \leq OM$.

Варіант 75

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sin 128^\circ \cos 68^\circ - \cos 128^\circ \sin 68^\circ}{\cos 44^\circ \cos 16^\circ - \sin 44^\circ \sin 16^\circ}$.

2.2. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{1}{16} \leq 2^{3-x} < 8$?

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\frac{\log_5 18 + \log_5 0,5}{\log_5 12 - 2 \log_5 2}$?

2.4. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{5}{\sqrt{7x+3}} - \frac{1}{|x|-2}$.

2.5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = 2x^2 - x^4$.

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_e^{e^2} \frac{2}{x} dx$.

2.7. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см.

2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра нижньої основи під кутом 90° , а з центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$?

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$5 \sin x - 6 \cos x = 5.$$

3.3. Через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи правильної трикутної призми проведено площину, яка утворює з площиною основи кут 60° . Площа утвореного перерізу дорівнює $8\sqrt{3}$ см². Знайдіть об'єм призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

$$\log_2 x^2 + \log_2 y^2 = 2\log_2 x + 2\log_2 y.$$

- 4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy(x+1)(y+1) = 72, \\ (x-2)(y-2) = -5. \end{cases}$$

- 4.3.^м Знайдіть найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = x^3 - 2x|x-2|$$

на проміжку $[0; 3]$.

- 4.4.^м Навколо трикутника ABC описано коло. З довільної точки M кола проведено перпендикуляри MN і MK до прямих AB і AC відповідно. Знайдіть положення точки M , для якого довжина відрізка NK є найбільшою.

Варіант 76

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1 Спростіть вираз $x^{-1}y^{\frac{5}{4}} \cdot \left(x^{-\frac{2}{7}}y^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$.

2.2. Розв'яжіть рівняння $5^{x+2} + 5^x = 130$.

2.3. Які координати точки перетину графіків функцій $y = \sqrt{3-2x}$ і $y = x$?

2.4. Якого найбільшого значення набуває функція $f(x) = 4x^3 - x^6 + 1$?

2.5. Знайдіть третій член геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = 2 + \sqrt{3}$, а знаменник $q = 2 - \sqrt{3}$.

2.6. Бригада робітників мала виготовити 900 деталей. У зв'язку з хворобою одного з робітників кожному з тих, що працювали, довелося виготовити на 10 деталей більше, ніж планувалось. Скільки робітників у повному складі бригади?

2.7. Діагоналі трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці O . Знайдіть відношення площ трикутників AOD і BOC , якщо $AO = 8$ см, $OC = 5$ см.

2.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а її діагональний переріз — прямокутний трикутник. Знайдіть об'єм піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_x 125x \cdot \log_5^2 x = 4.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

3.3. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють 24 см і 40 см відповідно. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \ln(\sqrt{a^2 + x^2} + x)$ є непарною?
- 4.2.^м Знайдіть площу трикутника, обмеженого віссю ординат, прямою $y = 7 - x$ і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.
- 4.3.^м Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.
- 4.4.^м Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці J . Точка J_1 – центр зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони AC . Бісектриса кута B перетинає описане навколо трикутника коло в точці D . Доведіть, що $DJ = DJ_1$.

Варіант 77

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{10}{\sqrt{x-9}} - \sqrt{x-9} = 3.$$

2.3. Обчисліть значення виразу $\frac{\log_7 28 - \log_7 4}{3 \log_6 3 + \log_6 8}$.

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52.$$

2.5. Знайдіть точку максимуму функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 7$.

2.6. Арифметична прогресія (a_n) задана формулою загального члена $a_n = 6n - 1$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

2.7. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 6,5 см. Обчисліть площу цього трикутника.

2.8. Точка K знаходиться на відстані 2 см від площини α . Похилі KA і KB утворюють з площиною α кути 45° і 30° відповідно, а кут між похилими дорівнює 135° . Знайдіть відстань між точками A і B .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \log_{x-4}(14 + 5x - x^2)$.

3.2. Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{x^6}}{x} - 2$.

3.3. Основа прямої трикутної призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом α при вершині. Діагональ бічної грані призми, яка містить основу рівнобедреного трикутника, нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 3 \ln x - ax + 4$$

не має критичних точок?

4.2. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^3 \frac{3^x - 1}{3^x + 1} dx$.

4.3.^м Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

$$|\cos x \cos y| = 1.$$

4.4.^м Доведіть, що коло, яке проходить через ортоцентр трикутника і дві його вершини, дорівнює колу, описаному навколо трикутника.

Варіант 78

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{\sqrt[5]{9}}$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$7^x \cdot 2^{x-3} = 0,125 \cdot 14^{9-2x}.$$

2.3. Спростіть вираз $\frac{\cos(-\beta) - \cos^3(-\beta)}{\sin(-\beta) \cos^2 \beta}$.

2.4. Знайдіть значення виразу $\log_3 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 9$.

2.5. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x) = (3x - 1)e^{2x}$.

2.6. Комбайнер мав зібрати врожай з поля площею 60 га. Він збирав щодня врожай з площі на 2 га більшої, ніж планував, а тому закінчив збирання врожаю на 1 день раніше строку. За скільки днів комбайнер зібрав урожай?

2.7. Сума зовнішніх кутів трикутника ABC , узятих по одному при вершинах A і C , дорівнює 230° . Знайдіть кут ABC .

2.8. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його висота дорівнює діаметру основи.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 3$, та віссю ординат.

3.2. Знайдіть область визначення функції:

$$f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{(x+2)(1-x)}.$$

3.3. Діагоналі трапеції перпендикулярні і дорівнюють 12 см і 16 см. Знайдіть висоту трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - 1) \arccos(x - a) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.4.^м Відомо, що M – точка перетину відрізків AB і CD , $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. Доведіть, що точки A , B , C і D належать одному колу.

Варіант 79

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Скоротіть дріб $\frac{b - 49b^{0,5}}{b^{0,75} - 7b^{0,5}}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{3}\right)^{8+4x-x^2} < \frac{8}{27}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+10} = 3.$$

2.4. Чому дорівнює найбільше значення функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 7$ на проміжку $[0; 3]$?

2.5. Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 10,5; 9,8; 9,1; ...

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0.$$

2.7. З точки K , що лежить поза прямою a , проведено до цієї прямої похилі KA і KB , які утворюють із нею кути 45° і 30° відповідно. Знайдіть довжину проекції похилої KB на пряму a , якщо $KA = 8\sqrt{6}$ см.

2.8. Радіус основи конуса дорівнює $2\sqrt{5}$ см, а відстань від центра його основи до твірної — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2\lg x}{\lg(4x-3)} = 1.$$

3.2. Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.3. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом α , площа якого дорівнює S . У призмі проведено діагональний переріз, що проходить через меншу діагональ основи. Діагональ цього перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2 \cos x \cos 2x} = \sqrt{6 \cos x + 5 \sin 2x}.$$

4.2.^м Визначте кількість розв'язків системи

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases}$$

залежно від значення параметра a .

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0.$$

4.4.^м У колі, радіус якого дорівнює R , проведено дві хорди AB і CD , що перетинаються. Відомо, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$. Доведіть, що хорди AB і CD перпендикулярні.

Варіант 80

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{16}{b+8b^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{b^{\frac{1}{2}}}$.

2.2. Чому дорівнює значення виразу $36^{\frac{1}{3} \log_6 64 - 3 \log_6 2}$?

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$2 \sin^2 x - \cos 2x = 0.$$

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$(2^{x-1})^{x+2} = 32^x \cdot 8^{x+2}.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = \sin x - e^{3x}$, графік якої проходить через початок координат.

2.6. Чому дорівнює сума коренів рівняння $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$?

2.7. На стороні CD квадрата $ABCD$ позначено точку K так, що $\angle ABK = 60^\circ$. Знайдіть відрізок AK , якщо $BC = \sqrt{6}$ см.

2.8. Діагональ осевого перерізу циліндра дорівнює d і утворює з твірною циліндра кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{2x-3}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.2. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$.

3.3. Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Обчисліть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{20 \cdot 3^x - 11} > 3^x - 4.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра b система

$$\begin{cases} 4x + ay = b, \\ x + y = a \end{cases}$$

має розв'язки при будь-якому значенні параметра a ?

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}.$$

4.4.^м Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H . Пряма AH вдруге перетинає описане навколо трикутника коло в точці D . Доведіть, що $BD = HB$.

Варіант 81

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\sin 2\alpha}$.

2.2. Знайдіть значення x , якщо $\log_{0,6} x = 2 \log_{0,6} 6 - \log_{0,6} 12 + \log_{0,6} 1,5$.

2.3. Спростіть вираз:

$$\frac{4b+100}{b-25} : \left(\frac{\sqrt{b}+5}{\sqrt{b}-5} + \frac{\sqrt{b}-5}{\sqrt{b}+5} \right).$$

2.4. Розв'яжіть нерівність $5^{2x-x^2} > \frac{1}{125}$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 2x - 6x^2 - 4x^3$, графік якої проходить через точку $B(-1; -3)$.

2.6. Число 192 є членом геометричної прогресії 6; 12; 24; Знайдіть номер цього члена.

2.7. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $AC = 3\sqrt{3}$ см, відрізок CM — бісектриса трикутника. Знайдіть відрізок AM .

2.8. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 20π см². Знайдіть об'єм цього конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $64^{\lg^2 x} + 8 = 9 \cdot 8^{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$.

3.2. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{3x^2 - 22x}$ у точці з абсцисою $x_0 = -1$.

3.3. Бічне ребро правильної призми $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнює $\sqrt{161}$ см, а діагональ призми — 17 см. Знайдіть площу чотирикутника $AB_1 C_1 D$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a) \arccos(x + 5) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_x(2x + 3) < 2.$$

4.4.^м У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить один із катетів у відношенні $1:2$, рахуючи від вершини прямого кута. Відстань від центра вписаного кола до вершини прямого кута дорівнює $\sqrt{18}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

Варіант 82

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{25^{-\frac{2}{5}} \cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$?
- 2.2. Знайдіть корінь рівняння $0,0016^x = 5 \cdot 25^x$.
- 2.3. Чому дорівнює значення виразу $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, якщо $\cos \alpha = -0,8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$?
- 2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\log_7(4x - 6) > \log_7(2x - 4)$.
- 2.5. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.
- 2.6. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2} + \frac{9}{\sqrt[3]{x} + 2} = 4$.
- 2.7. На катеті BC трикутника ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) позначено точку D . Знайдіть площу трикутника ABD , якщо $AB = 25$ см, $AD = 17$ см, $AC = 15$ см.
- 2.8. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно з центра цієї основи під кутом β . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Обчисліть інтеграл $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.
- 3.2. Спростіть вираз $\frac{2 \sin^2 3\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3\alpha\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)}$.
- 3.3. Коло, центр якого належить стороні MK трикутника MKE , проходить через точку K , дотикається до сторони ME у точці E і перетинає сторону MK у точці F . Знайдіть більший кут трикутника MKE , якщо сторона ME дорівнює радіусу даного кола.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1." При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 + (2a - 3)x + a^2 - 2a = 0$$

має два різних від'ємних корені?

4.2." Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3^2 x + (x - 1) \log_3 x = 12 - 3x.$$

4.3." Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ на проміжку $\left[-1; \frac{1}{8}\right]$.

4.4." В опуклому чотирикутнику відрізки, які сполучають середини протилежних сторін, рівні. Доведіть, що діагоналі чотирикутника перпендикулярні.

Варіант 83

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\frac{1}{3} \log_5 \frac{8}{27} + \log_5 75 - \log_5 2$?

2.2. Розв'яжіть рівняння:

$$4^{x+2} + 6 \cdot 4^{x-1} = 70.$$

2.3. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x+5)(x-2)}{(x-1)^2} \leq 0$.

2.4. Обчисліть значення виразу $\sqrt[6]{(6-\sqrt{5})^6} + \sqrt[8]{(1-\sqrt{5})^8}$.

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, графік якої проходить через точку $M(2; -7)$.

2.6. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{1}{3}x + 2$.

2.7. Сторони паралелограма дорівнюють 24 см і 30 см, а кут між його висотами — 30° . Знайдіть площу паралелограма.

2.8. Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см, проведено площину, що перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 90° . Знайдіть площу перерізу, якщо кут між діагоналлю перерізу і вказаною хордою дорівнює 60° .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

3.2. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos^2 x - 0,5 \sin 2x = 1$.

3.3. Через сторону основи правильної трикутної піраміди і середину протилежного бічного ребра проведено площину, яка утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^4 + (a + 2)x^2 + a^2 + 3a = 0$$

має три різних корені?

4.2.^м Обчисліть інтеграл:

$$\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx .$$

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geq 0 .$$

4.4.^м Два кола перетинаються в точках A і B . Через точку P , яка належить прямій AB (але не відріzk AB), проведено дві прямі, які перетинають перше коло в точках K і L , друге — у точках M і N . Доведіть, що точки K, L, M, N лежать на одному колі.

Варіант 84

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\log_{27} \log_8 \sqrt[5]{32}$?

2.2. Спростіть вираз $\frac{\cos 3\alpha}{2\sin \alpha} + \frac{\sin 3\alpha}{2\cos \alpha}$.

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{4x^2 - 5x - 2} = -x .$$

2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{x^2 - 4x + 4}{x + 1} > 0$.

2.5. Знайдіть найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$ на проміжку $[0; 3]$.

2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4x+5}}$, графік якої проходить через точку $M(5; 7)$.

2.7. У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, O – точка перетину діагоналей, $AO:OC=5:2$, середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайдіть більшу основу трапеції.

2.8. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Побудуйте графік функції $f(x) = 2 - \sqrt{\sin x - 1}$.

3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_2(4x) + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8 .$$

3.3. Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см, а більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$4^{3-4\sin^2\frac{x}{2}} + 15 \cdot 4^{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} - 4 = 0.$$

4.2.^м Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 3$, яка перпендикулярна до прямої $y - x - 3 = 0$.

4.3.^м При яких натуральних значеннях n многочлен

$$P(x) = (1 - 2x^2)^n + (3x - 8)^{2n}$$

ділиться націло на многочлен $x - 5$?

4.4.^м На відрізку, що з'єднує середини основ трапеції, взято точку, яку сполучено з усіма вершинами трапеції. Доведіть, що трикутники, прилеглі до бічних сторін трапеції, рівновеликі.

Варіант 85

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{8-3\sqrt{7}}+\sqrt{8+3\sqrt{7}}\right)^2$.

2.2. Яка область значень функції $f(x) = 7^{\cos x}$?

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+2) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x - 1).$$

2.4. Розв'яжіть рівняння $\cos 2x + \cos x = 0$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{1}{3}}^1 \left(\frac{1}{x^2} - 3\right) dx$.

2.6. Арифметична прогресія (a_n) задана формулою загального члена $a_n = 5n - 12$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

2.7. Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 30 см. Точка дотику кола зі стороною AB ділить її у відношенні 3:2, рахуючи від точки A , а точка дотику зі стороною BC віддалена від точки C на 5 см. Знайдіть сторону AC .

2.8. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відомо, що $AD = 24$ см, $CD = 5$ см, $AA_1 = 10$ см. Знайдіть площу прямокутника $A_1 B_1 CD$.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

3.2. Доведіть тотожність
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{4} - 3\pi\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}.$$

3.3. Через сторону правильного трикутника проведено площину, яка утворює з двома іншими сторонами трикутника кути по 45° . Знайдіть кут між площиною трикутника і проведеною площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leq \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x}-a)(2^{2x}-10 \cdot 2^x+16)=0$$

має два різних корені?

4.3.^м Побудуйте графік рівняння:

$$\cos^2 x + \cos^2 y = 2.$$

4.4.^м Доведіть, що площу S прямокутного трикутника можна знайти за формулою $S = (p-a)(p-b)$, де p – півпериметр трикутника, a і b — довжини катетів.

Варіант 86

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $5^x + 5^{x+2} \leq 130$.

2.3. Чому дорівнює значення виразу $\frac{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{\left(9^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\right)(3-\sqrt{5})}$?

2.4. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+6x+9}{x^2-1} \leq 0$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^3 (x^2 + 4x) dx$.

2.6. Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{x-3}{x}$.

2.7. У трикутник ABC вписано ромб $DMNA$ так, що кут A в них спільний, а вершина M належить стороні BC , $CM = 6$ см, $BM = 4$ см, $AB = 20$ см. Знайдіть сторону ромба.

2.8. Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює a . Знайдіть площу його перерізу, який проходить через ребро DC і середину ребра AB .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_4(5^x - 4) + \log_4(5^x - 1) = 1.$$

3.2. Число 48 подайте у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб їх добуток був найбільшим.

3.3. У трикутнику ABC точка O — центр вписаного кола. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника, якщо $BO = 2\sqrt{3}$ см, $CO = 3$ см, $\angle A = 120^\circ$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 4.1.^м Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

$$(3^x - a)\sqrt{x-2} \leq 0.$$

- 4.2.^м Доведіть, що при всіх $x > -1$ виконується нерівність:

$$\ln(x+1) \leq x.$$

- 4.3.^м Знайдіть корені рівняння:

$$\cos 2x + \cos \frac{3x}{4} = 2.$$

- 4.4.^м Сума радіусів вписаного та описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

Варіант 87

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Скільки цілих чисел містить множина розв'язків нерівності $(x+1)^2(x+6)(x-2) < 0$?
- 2.2. Розв'яжіть рівняння $\log_3^2 x - \log_3 x^2 - 8 = 0$.
- 2.3. До розчину масою 180 г, який містить 15 % солі, додали 20 г води. Який відсотковий вміст солі в новому розчині?
- 2.4. Знайдіть корені рівняння:
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$$
- 2.5. Чому дорівнює найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на проміжку $[0; 2]$?
- 2.6. Знайдіть первісну функції $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, графік якої проходить через точку $A(1; 8)$.
- 2.7. Чому дорівнює площа паралелограма зі сторонами 9 см і 15 см, якщо одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони?
- 2.8. Радіус основи конуса дорівнює R , а його осьовий переріз — рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x} > 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}.$$

- 3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 40} = x^2 - 3x + 8.$$

- 3.3. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом b і протилежним до нього кутом β . Усі бічні ребра піраміди утворюють з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм піраміди.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$\sin^2 2x - a \sin 2x = 0$$

має на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ два корені?

4.2.^м Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат та дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$2 \lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1) \cdot \lg(2x + 1).$$

4.4.^м В опуклому чотирикутнику $ABCD$ провели діагональ AC . Кола, вписані в трикутники ABC і ADC , дотикаються одне до одного. Доведіть, що в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло.

Варіант 88

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[8]{1-6x}$.

2.2. Обчисліть значення виразу $216^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{2}} + 25^{\frac{1}{2}}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $(1,3)^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geq 1$.

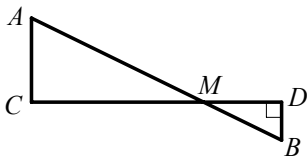
2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{\lg x + 3} + \frac{2}{3 - \lg x} = 1.$$

2.5. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$, графік якої проходить через точку $A(2; 6)$.

2.6. Знайдіть точку мінімуму функції $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^4$.

2.7. Відрізки AC і BD , зображені на рисунку, паралельні, $\angle BDM = 90^\circ$, $BM = 10$ см, $BD = 8$ см, $AC = 24$ см. Яка довжина відрізка CD ?



2.8. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Діагональ бічної грані, що містить катет, протилежний куту α , нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{\cos 5\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin 5\alpha}{\cos \alpha} \right) \cdot \frac{\sin 10\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha}.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt[4]{x^4} + 2x$.

3.3. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 18 см, а діагональ — 13 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{1+3^x-9^x} = \sqrt{4-3\cdot 3^x}.$$

4.2.^м Знайдіть усі значення параметра a , при яких функція

$$f(x) = (a-8)x^3 - 3(a-8)x^2 - 12x + 5$$

спадає на $\mathbb{R}$.

4.3.^м Доведіть тотожність:

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.4.^м Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторони AB і BC у точках M і F відповідно. Знайдіть відношення площ трикутників MFB і ABC , якщо $\angle ABC = 45^\circ$.

Варіант 89

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $10000^{-0,25} \cdot 100^{-\frac{1}{3}} \cdot 1000^{\frac{2}{9}}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} \geq 82$.

2.3. Яка область визначення функції $y = \lg \frac{1-2x}{x+1}$?

2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} - 3 = 0$.

2.5. Знайдіть корені рівняння $1 - \cos 2x + \sin x = 0$.

2.6 Знайдіть первісну функції $f(x) = 16x^3 + e^{\frac{x}{2}}$, графік якої проходить через точку $B(1; 2\sqrt{e})$.

2.7. Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

2.8. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см. Знайдіть площу перерізу, який проходить паралельно площині основи і ділить висоту піраміди у відношенні 1:3, рахуючи від вершини піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\lg^2 100x - 8 \lg x = 4.$$

3.2. Обчисліть значення виразу:

$$\cos 10^\circ \sin 80^\circ + \sin^2 280^\circ \cos^2 100^\circ + \sin^2 170^\circ \sin^2 350^\circ.$$

3.3. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax + 3$$

зростає на всій числовій прямій?

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$4x^2 - 4x \cos 8\pi x + 1 = 0.$$

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \sqrt{3x - 2y} = \sqrt{5 + x - 3y}. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутнику ABC відомо, що $\angle CAB = 20^\circ$, $\angle CBA = 40^\circ$. На стороні AB побудовано рівносторонній трикутник ABM , точки M і C лежать по різні сторони від прямої AB . Доведіть, що $\angle ACM = \angle MCB$.

Варіант 90

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз $\frac{b}{9-b} - \frac{3}{b^{0,5}+3} + \frac{b^{0,5}}{b^{0,5}-3}$.

2.2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=2, \\ x^3+y^3=26. \end{cases}$

2.3. Спростіть вираз $\frac{1-\operatorname{ctg} \beta}{1-\operatorname{tg} \beta}$.

2.4. Скільки цілих розв'язків має нерівність:
 $\log_{0,7}(x+4) > \log_{0,7}(19-4x)$?

2.5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} = 5$.

2.6. Який номер першого від'ємного члена арифметичної прогресії
3,4; 3; 2,6; ... ?

2.7. Висота AF ділить сторону BC трикутника ABC на відрізки BF і CF .
Знайдіть сторону AC , якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle ABC = 60^\circ$, а сторона AB дорівнює 18 см.

2.8. Основа прямої призми — трикутник зі стороною a , протилежним цій стороні кутом α і прилеглим кутом β . Діагональ бічної грані, яка містить сторону основи, до якої прилягають кути α і β , нахилена до площини основи під кутом γ . Знайдіть висоту призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції
 $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$.

3.3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть область значень функції $y = 3^{|\sin x \cos x|}$.

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(\sin x - \cos x) \sqrt{5x - 4 - x^2} \geq 0.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x + a) \log_3(2x - 5) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.4.^м У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) відрізок CD — висота. Бісектриси прямих кутів трикутників ACD і DCB відповідно дорівнюють l_1 і l_2 . Знайдіть бісектрису трикутника ABC , проведену з вершини його прямого кута.

Варіант 91

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Знайдіть суму дванадцяти перших натуральних чисел, які кратні числу 6.

2.2. Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{4-x^2} = x+4$.

2.3. Яка область визначення функції $y = \frac{\sqrt[4]{7-2x}}{4^x-16}$?

2.4. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

2.5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ у точці $x_0 = e$.

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{3}}$.

2.7. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8:3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Обчисліть периметр трикутника.

2.8. Основа прямої призми — прямокутний трикутник із гіпотенузою 8 см і кутом 30° . Об'єм призми дорівнює $48\sqrt{3}$ см³. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x^{-2}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$ Користуючись

побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і спадання функції.

3.3. Через сторону квадрата проведено площину, яка утворює з його діагоналю кут 30° . Знайдіть кут між площиною квадрата і проведеною площиною.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right)$?

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{5x+8}-6\sqrt{5x-1}+\sqrt{5x+24}-10\sqrt{5x-1}\leq 2.$$

4.3.^м На параболі $y = 4 - x^2$ вибрано дві точки з абсцисами $x = -1$ і $x = 3$.

Через ці точки проведено пряму. Знайдіть рівняння дотичної до параболи, яка паралельна цій прямій.

4.4.^м Точки H і O — відповідно ортоцентр і центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC . Відомо, що точки B , H , O і C лежать на одному колі. Знайдіть кут BAC .

Варіант 92

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Обчисліть значення виразу $12\log_7 \sqrt[5]{7^4 \sqrt{7}}$.

2.2. Скоротіть дріб $\frac{b^2 - 16}{b^2 + b - 12}$.

2.3. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$.

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^1 (x^2 - 2x + 4) dx$.

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$4\sin^2 x - 11\cos x - 1 = 0.$$

2.6. При якому значенні a найбільше значення функції $f(x) = -x^2 + 2x + a$ дорівнює 3?

2.7. Довжини діагоналей ромба відносяться як $\sqrt{5} : 2$. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр дорівнює 36 см.

2.8. Катет прямокутного трикутника дорівнює a , а прилеглий кут дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, утвореного при обертанні цього трикутника навколо даного катета.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{0,5}(x - 1) + \log_{0,5}(x - 2) \geq -1.$$

3.2. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}.$$

3.3. У рівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 13$ см, $AC = 24$ см. Пряма, паралельна основі трикутника, перетинає сторони AB і BC у точках F і N відповідно і розбиває даний трикутник на дві рівновеликі частини. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник FBN .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x} - a)\left(x - \frac{9}{x}\right) = 0$$

має єдиний розв'язок?

4.2.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -1. \end{cases}$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$5^x + 12^x = 13^x.$$

4.4.^м У трапеції $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції, якщо $AC=12$ см, а середня лінія трапеції дорівнює 10 см.

Варіант 93

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $2\log_6 3 + \frac{1}{3}\log_6 64$?
- 2.2. При якому значенні a графік функції $y = ax^{-5}$ проходить через точку $B\left(\frac{1}{2}; 192\right)$?
- 2.3. Розв'яжіть рівняння:
$$9^{x+1} + 9^x = 270.$$
- 2.4. Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює $-2,5$, а сума десяти перших членів дорівнює 110 ?
- 2.5. Знайдіть корені рівняння:
$$1 + \cos 8x = \cos 4x.$$
- 2.6. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \ln(5x + 4)$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$?
- 2.7. Обчисліть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а різниця діагоналей — 10 см.
- 2.8. З точки M до площини α проведено похилі MN і MK , довжини яких відносяться як $25:26$. Знайдіть відстань від точки M до площини α , якщо довжини проєкцій похилих MN і MK на цю площину дорівнюють 7 см і 10 см.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-2)^2} = 3x - 4$.
- 3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt{\log_2 \sin x}$.
- 3.3. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено площину, яка утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює a .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Обчисліть інтеграл:

$$\int_{-1}^1 \ln(\sqrt{x^2+1}-x) dx.$$

4.2.^м Знайдіть корені рівняння:

$$\sin 2x + \operatorname{tg} 2x = -\frac{5}{6} \operatorname{ctg} x.$$

4.3.^м При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - (a+2)\frac{x^2}{2} - 3(a+2)x - 1$$

має від'ємну точку максимуму?

4.4.^м Через вершини A і C трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони BA і BC у точках M і N відповідно. Пряма BF — дотична до кола, описаного навколо трикутника ABC . Доведіть, що прямі MN і BF паралельні.

Варіант 94

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Яка область значень функції $y = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} x$?

2.2. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$

2.3. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

2.4. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{2}} (7x - 28) > \log_{\frac{1}{2}} 6x.$$

2.5. Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x+3}} = 1.$

2.6. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \, dx.$

2.7. Пряма m є спільною зовнішньою дотичною двох кіл, радіуси яких дорівнюють 10 см і 2 см, точки A і B — точки дотику прямої m з даними колами, $AB = 15$ см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

2.8. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = x + \frac{9}{x}.$

3.2. Доведіть тотожність:

$$1 - \cos \alpha - \sin \alpha = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

3.3. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її тупих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 11:25. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 120 см.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$27 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 9^x \geq 0.$$

4.2.^м Визначте кількість коренів рівняння

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - a) = 0$$

на проміжку $(0; 2\pi]$ залежно від значення параметра a .

4.3.^м Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють нерівність $\log_y(9 - x^2) \geq 2$.

4.4.^м В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD є бісектрисою кута ABC . Відомо, що $AB=9$ см, $BC=14$ см, $CD=12$ см, $DA=13$ см. Знайдіть кут BCD .

Варіант 95

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{4}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}$.

2.2. Розв'яжіть нерівність:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x}.$$

2.3. Знайдіть корені рівняння:

$$6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0.$$

2.4. Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 14x + 43$.

2.5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 12} \geq 0$.

2.6. У розчині солі у воді маса солі становить $\frac{1}{4}$ маси води. Скільки відсотків маси розчину становить маса солі?

2.7. З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 13 см і 15 см. Знайдіть відстань від даної точки до прямої, якщо різниця проєкцій похилих на цю пряму дорівнює 4 см.

2.8. Діагональ прямокутника дорівнює a і утворює з його меншою стороною кут β . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням даного прямокутника навколо його меншої сторони.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Обчисліть значення виразу $\log_9 10 \cdot \lg 11 \cdot \log_{11} 12 \cdot \log_{12} 27$.

3.2. Знайдіть площу фігури, обмеженої гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

3.3. Основою піраміди $MABCD$ є квадрат $ABCD$. Бічна грань BMC перпендикулярна до площини основи, грань AMD нахилена до площини основи під кутом 30° , грані AMB і CMD утворюють з площиною основи рівні кути. Знайдіть кут нахилу грані AMB до площини основи.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$(x-4)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0.$$

4.3.^м Знайдіть корені рівняння:

$$\sqrt{-\cos 2x} = \cos x - \sin x.$$

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\left| 2^x - 1 \right| + \left| 2^x - 2 \right| = 1.$$

4.4.^м Дано два концентричних кола. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного кола до кінців діаметра іншого кола не залежить ні від обраної точки, ні від обраного діаметра.

Варіант 96

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Спростіть вираз:

$$\frac{2b}{b^2 - 25} : \left(\frac{1}{b^2 + 10b + 25} - \frac{1}{25 - b^2} \right).$$

2.2. Розв'яжіть рівняння $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 = 0$.

2.3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1) > -3.$$

2.4. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^2 (4x-1) dx$.

2.5. Розв'яжіть рівняння:

$$1 - \cos 2x = 2 \sin x.$$

2.6. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_5 + a_{12} = 41$ і $a_{10} + a_{14} = 62$.

2.7. Бічні сторони прямокутної трапеції дорівнюють 3 см і 5 см, а менша діагональ — $\sqrt{58}$ см. Чому дорівнює периметр трапеції?

2.8. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою b і кутом β при вершині. Діагональ грані, що містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть об'єм призми.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$.

3.2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 + 3x$, яка паралельна прямій $y = x$.

3.3. Відрізок AK — медіана трикутника ABC , $AC = a$, $\angle BAK = \alpha$, $\angle CAK = \beta$. Знайдіть медіану AK .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_x(4x-3) \leq 2.$$

4.2.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6.$$

4.3.^м Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos x - \frac{1}{2} = 0$

і $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$ рівносильні.

4.4.^м Точка M — середина сторони AC трикутника ABC . На відрізках AB і MC позначено відповідно точки N і P так, що відрізок NP розбиває трикутник ABC на дві рівновеликі частини. Доведіть, що $MN \parallel BP$.

Варіант 97

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Обчисліть значення виразу $0,125^{-\frac{1}{3}} + 0,216^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot 16^{-\frac{1}{4}}$.
- 2.2. Спростіть вираз $(1 + \cos(2\pi - 2\alpha)) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.
- 2.3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{10 - 3x} = -x$.
- 2.4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 2x + 1} \leq 0$.
- 2.5. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt{5x + 1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$?
- 2.6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 16x^2 + y^2 + 8xy = 81, \\ x - y = 1. \end{cases}$
- 2.7. На стороні BC трикутника ABC позначено точку D . Знайдіть відрізок BD , якщо $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $AB = c$.
- 2.8. Діагоналі грані BB_1C_1C призми $ABCA_1B_1C_1$ перетинаються в точці O . Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть рівняння:

$$x^{\lg x - 3} = 10\,000.$$

- 3.2. Побудуйте графік функції $f(x) = \sqrt[6]{\sin x - 1}$.

- 3.3. Площина, яка проходить через вершину конуса, перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом β . Площина перерізу утворює з висотою конуса кут φ . Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H .

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^2 |x+1| dx$.

4.2.^м На гіперболі $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, задано точку $M(x_0; y_0)$ таку, що $x_0 = \frac{1}{9} y_0$.

Знайдіть площу трикутника, утвореного дотичною до гіперболи в точці M і осями координат.

4.3.^м Розв'яжіть рівняння:

$$\cos \frac{\pi x}{2} = x^2 + 8x + 17.$$

4.4.^м У прямокутну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$) вписано коло з центром O . Знайдіть площу трапеції, якщо $OC = 12$ см, $CD = 20$ см.

Варіант 98

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Подайте у вигляді степеня з раціональним показником вираз $b^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{b\sqrt{b}}$.
- 2.2. Чому дорівнює значення виразу $3 \operatorname{tg} 7\alpha \operatorname{ctg} 7\alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$, якщо $\sin \alpha = 0,25$?
- 2.3. Знайдіть значення виразу $\frac{3 \lg 4 + \lg 0,5}{\lg 9 - \lg 18}$.
- 2.4. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = e^{3x^2 - 4x + 1}$ у точці $x_0 = 1$.
- 2.5. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 \sin 3x - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\right) dx$.
- 2.6. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \log_3(9 - x^2) + \frac{1}{x+1}$.
- 2.7. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а інший катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть площу трикутника.
- 2.8. Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R , а твірна утворює з площиною основи кут β .

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Розв'яжіть нерівність:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x-1} - 8\left(\frac{1}{7}\right)^x + 1 \leq 0.$$

- 3.2. Розв'яжіть рівняння:

$$\sin 2x + \sin 8x = \sqrt{2} \cos 3x.$$

- 3.3. Бісектриса кута прямокутника ділить діагональ на відрізки завдовжки 30 см і 40 см. На відрізки якої довжини ділить ця бісектриса сторону прямокутника?

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть рівняння $2^{3-x^2} = x^2 + 8$.

4.2.^м Знайдіть множину значень функції $f(x) = \cos x - \sqrt{-\sin^2 3x}$.

4.3.^м Розв'яжіть нерівність:

$$2 + 3\log_{x+1} 3 \geq \log_3(x+1).$$

4.4.^м Продовження висот гострокутного трикутника ABC , проведених до сторін BC , AC і AB , перетинають описане навколо цього трикутника коло в точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно. Доведіть, що точка перетину бісектрис трикутника $A_1B_1C_1$ збігається з ортоцентром трикутника ABC .

Варіант 99

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

2.1. Чому дорівнює значення виразу $\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$?

2.2. Спростіть вираз $\frac{c^2+14c+49}{c+6} : \left(\frac{13}{c+6} - c + 6\right)$.

2.3. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

2.4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{3^x-1}$.

2.5. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 (3x^2 - 6x - 1) dx$.

2.6. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_3(x-3) + \log_3(x-1) = 1.$$

2.7. У рівнобедреному трикутнику MKE ($MK=KE$) бісектриса кута E перетинає сторону MK у точці C . Знайдіть кути трикутника MKE , якщо $\angle KCE = 126^\circ$.

2.8. Площа повної поверхні конуса дорівнює 90π см², а його твірна більша за радіус основи на 8 см. Знайдіть об'єм конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

3.1. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt{x^2-4x+20} + 4x = x^2 + 10$.

3.2. Доведіть тотожність:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = -\sin 4\alpha.$$

3.3. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$. Бічна грань ASB перпендикулярна до площини основи, грані CSB і ASD нахилені до площини основи під кутом β , а грань CSD — під кутом φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо $AB = 2a$.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Знайдіть розв'язки системи рівнянь залежно від значення параметра a :

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sqrt{a}, \\ \sin y \cos x = 1. \end{cases}$$

4.2.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\log_2(9 - 2^x) \geq 3^{\log_3(3-x)}.$$

4.3.^м При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 3$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $B(1; 4)$?

4.4.^м Трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в коло. Точка O – центр цього кола. Знайдіть площу трапеції, якщо $\angle BOA = 60^\circ$, а висота трапеції дорівнює h .

Варіант 100

Частина друга

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.8. Запишіть відповідь у бланк відповідей.

- 2.1. Чому дорівнює значення виразу $27^{\frac{5}{12}} \cdot 9^{-\frac{5}{8}} \cdot 81^{\frac{3}{4}}$?
- 2.2. Спростіть вираз $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- 2.3. Розв'яжіть нерівність $8^x - 8^{x-2} \leq 126$.
- 2.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} = 8$.
- 2.5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{4x-3}{x-2}$ у точці $x_0 = 3$.
- 2.6. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \sqrt[4]{18+3x-x^2} - \frac{5}{x-4}$.
- 2.7. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) катет AC дорівнює 5 см, а медіана AM — 13 см. Знайдіть гіпотенузу AB .
- 2.8. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу по хорді, довжина якої дорівнює b . Ця хорда стягує дугу, градусна міра якої дорівнює 120° . Кут між твірними в утвореному перерізі дорівнює 90° . Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Частина третя

Розв'язання задач 3.1 – 3.3 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

- 3.1. Доведіть тотожність $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 1$.
- 3.2. Розв'яжіть рівняння:
$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$$
- 3.3. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 7 см, а її діагоналі — 10 см і 17 см. Знайдіть площу трапеції.

Частина четверта

Розв'язання задач 4.1 – 4.4 повинно мати обґрунтування. У ньому потрібно записати послідовні логічні дії та пояснення, зробити посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання схемами, графіками, таблицями.

4.1.^м Розв'яжіть нерівність:

$$\sqrt{-x^2 + 6x} - 5 \log_3(x - 2) \leq 0.$$

4.2.^м При яких значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше трьох коренів рівняння $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x = 0$?

4.3.^м Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lg x - \lg y = y - x, \\ x^2 - xy + y^2 = 9. \end{cases}$$

4.4.^м У трикутнику ABC центри описаного та одного із зовнівписаних кіл симетричні відносно прямої AB . Знайдіть кути трикутника ABC .

**Бланк відповідей
державної підсумкової атестації
з математики**

учня / учениці 11 _____ класу

назва навчального закладу

прізвище, ім'я, по-батькові учня (учениці)

Варіант № _____

Увага! Відмічайте тільки один варіант відповіді у рядку варіантів відповідей до кожного завдання. Будь-які виправлення у бланку недопустимі.

Якщо Ви вирішили змінити відповідь у деяких завданнях, то правильну відповідь можна зазначити в спеціально відведеному місці, розташованому внизу бланка відповідей.

У завданнях 1.1–1.16 правильну відповідь позначають тільки так: ☒

А Б В Г				А Б В Г				А Б В Г				А Б В Г							
1.1	☐	☐	☐	☐	1.5	☐	☐	☐	☐	1.9	☐	☐	☐	☐	1.13	☐	☐	☐	☐
1.2	☐	☐	☐	☐	1.6	☐	☐	☐	☐	1.10	☐	☐	☐	☐	1.14	☐	☐	☐	☐
1.3	☐	☐	☐	☐	1.7	☐	☐	☐	☐	1.11	☐	☐	☐	☐	1.15	☐	☐	☐	☐
1.4	☐	☐	☐	☐	1.8	☐	☐	☐	☐	1.12	☐	☐	☐	☐	1.16	☐	☐	☐	☐

У завданнях 2.1–2.8 упишіть відповідь.

2.1. _____ 2.5. _____

2.2. _____ 2.6. _____

2.3. _____ 2.7. _____

2.4. _____ 2.8. _____

Щоб виправити відповідь до завдання, запишіть його номер у спеціально відведених клітинках, а правильну, на Вашу думку, відповідь — у відповідному місці.

Завдання 1.1 – 1.16

номер завдання	А Б В Г			
1	☐	☐	☐	☐
1	☐	☐	☐	☐
1	☐	☐	☐	☐
1	☐	☐	☐	☐

Завдання 2.1 – 2.8

номер
завдання
